GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL VII. No. 1 1 OCTOMVRIE 1940

SOCIETATEA GAZETA MATEMATICĂ
CALEA GRIVIŢEI, 158. BUCUREŞTI 2. — TELEFON 3-9803

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL VII. No. 1 — 1 OCTOMVRIE 1940

ABONAMENTUL LEI 50 PE AN (9 numere)

Soluţii şi orice corespondenţă pe adresa:

Locot. C. D. IONESCU-ŢIU

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviţei 158. — Bucureşti 2

CERCURILE LUI LEMOINE

1°. **Geometria triunghiului** se ocupă cu proprietăţile figurilor construite în legătură cu un triunghiu iniţial numit *triunghiu fundamental* sau *triunghiu de referinţă*.

O asemenea figură, legată de triunghiu, este *cercul lui* EULER sau *cercul celor nouă puncte* — cerc pe care se află picioarele înălţimilor triunghiului fundamental, mijloacele laturilor sale şi mijloacele segmentelor mărginite de *ortocentru* (punctul de întâlnire al înălţimilor) şi de vârfurile triunghiului de referinţă. Situarea pe acelaşi cerc a celor nouă puncte se dovedeşte în multe manuale de geometrie pentru clasa V-a.

Vom înfăţişa — în cele ce urmează — alte cercuri importante ale geometriei triunghiului.

2°. **Drepte antiparalele.** Dacă două drepte întâlnesc latura Ox a unui unghiu în A, A' şi latura Oy în B, B' astfel ca unghiul OAB să fie egal cu unghiul OB'A', dreptele AB, A'B' se numesc *antiparalele* în raport cu unghiul *xoy* (dacă unghiul OAB este egal cu OA'B', dreptele sunt paralele).

Deoarece unghiul BAA' este suplimentar cu unghiul OAB, deci cu egalul acestuia OB'A', patrulaterul ABB'A' este inscriptibil. Deci:

„Două drepte antiparalele în raport cu un unghiu întâlnesc laturile unghiului în patru puncte conciclice“.

Perpendicularele ridicate în A, B pe Ox, Oy se întâlnesc într'un punct M. *„Dreapta* OM *este perpendiculară pe* A'B', *antiparalela dreptei* AB *în unghiul xoy“.*

Deoarece în patrulaterul inscriptibil OAMB,

$$\sphericalangle BAM = \sphericalangle BOM,$$

cum unghiul BAM este complementar cu OAB, deci cu OB'A', rezultă

$$\sphericalangle BOM + \sphericalangle OB'A' = 90^0,$$

adică — astfel cum am enunțat — OM este perpendiculară pe A'B'.

3°. **Simedianele unui triunghiu.** Într'un triunghiu ABC fie B'C' o antiparalelă a laturii BC în unghiul BAC. *Mediana triunghiului* AB'C', *corespunzătoare vârfului* A *se numește simediana triunghiului* ABC.

Simediana nu se schimbă oricare ar fi B'C' antiparalelă cu BC în unghiul A.

Fie M, S mijloacele segmentelor BC, B'C' — M', M'' și S', S'' proiecțiile lor pe laturile AB, AC. Din asemănarea triunghiurilor ABC, AC'B' rezultă

$$\frac{\overline{MM'}}{\overline{MM''}} = \frac{\overline{SS''}}{\overline{SS'}}.$$

Deci: M *și* S *fiind două puncte pe mediana și simediana vârfului* A, *distanțele lor la dreptele* AB, AC *sunt invers proporționale.*

Reciproca proprietății se dovedește imediat prin reducere la absurd.

4°. **Punctul lui** LEMOINE [1]). Un triunghiu are trei simediane. Fie K punctul de întâlnire al simedianelor vârfurilor A, B și k_a, k_b, k_c distanțele sale la dreptele BC, CA, AB — G centrul de greutate al triunghiului și g_a, g_b, g_c distanțele sale la BC, CA, AB.

Deoarece K se află pe simedianele lui A, B

$$\frac{k_b}{k_c} = \frac{g_c}{g_b}, \quad \frac{k_c}{k_a} = \frac{g_a}{g_c};$$

multiplicând aceste egalități,

$$\frac{k_b}{k_a} = \frac{g_a}{g_b}.$$

---

1) EMILE LEMOINE matematician francez. A trăit în a doua jumătate a secolului trecut. S'a ocupat cu geometria triunghiului.

Care arată că punctul K se află pe simediana vârfului C deoarece raportul distanţelor sale la AC, BC este invers cu al distanţelor centrului de greutate la aceleaşi laturi. S'a dovedit astfel proprietatea:

„Cele trei simediane ale unui triunghiu sunt concurente". Punctul lor de întâlnire, notat K, se numeşte *punctul lui* LEMOINE.

5°. **Primul cerc al lui** LEMOINE. *Paralelele duse prin punctul lui* LEMOINE *laturilor triunghiului determină pe laturile triunghiului şase puncte situate pe un cerc, numit primul cerc al lui* LEMOINE. *Centrul acestui cerc este la mijlocul segmentului care uneşte centrul cercului circumscris cu punctul lui* LEMOINE.

In adevăr, să numim A_b, A_c punctele în care paralela dusă prin K laturii BC taie dreptele AB, AC — B_a, B_c, C_a, C_b punctele analoage.

Patrulaterul $AB_a K C_a$ este paralelogram, deci simediana AK fiind mediană în triunghiul $AB_a C_a$, dreapta $B_a C_a$ este antiparalela laturii BC în unghiul A. Analog $A_b C_b$, $A_c B_c$ sunt antiparalele cu AC, AB în unghiurile respective. Rezultă că trapezul $C_a C_b A_b B$ are unghiurile dela bază egale, este trapez isoscel, deci inscriptibil. Şi cum

$$\sphericalangle C_a A_c A_b = \sphericalangle C_a C_b A_b,$$

A_b se află pe cercul $C_b A_b B_a C_a$ — la fel B_c.

O fiind centrul cercului circumscris, raza AO perpendiculară pe tangenta AT a cercului este perpendiculară şi pe $B_a C_a$ pentrucă

$$\sphericalangle TAB = \sphericalangle ACB = \sphericalangle AB_a C_a.$$

Cum $B_a C_a$ este coardă în primul cerc LEMOINE, perpendiculara ridicată în mijloc este paralelă cu AO şi trece prin mijlocul lui AK, deci trece şi prin mijlocul lui OK. La fel se vede că perpendiculara pe coarda $A_b C_b$ în mijloc, trece prin mijlocul lui OK.

Rezultă că mijlocul lui OK este centrul primului cerc LEMOINE.

6°. **Al doilea cerc al lui** LEMOINE. Antiparalelele duse prin punctul lui LEMOINE laturilor triunghiului în unghiurile respective — formează pe perechile de laturi corespunzătoare şase puncte situate pe un cerc numit *al doilea cerc al lui* LEMOINE. *Centrul acestui cerc este punctul lui* LEMOINE.

Fie A_b, A_c punctele în care antiparalela dusă prin K laturii BC întâlneşte dreptele AB, AC — B_a, B_c, C_a, C_b punctele obţinute analog. Avem

$$\overline{A_b K} = \overline{A_c K} \quad , \quad \overline{C_a K} = \overline{C_b K},$$

deci patrulaterul $C_a A_b C_b A_c$ este paralelogram, $A_b C_b$ este paralelă cu AC şi deducem că triunghiul $K A_b A_c$ este isoscel. Deci punctul K este centrul unui cerc care trece prin cele şase puncte A_b, A_c, B_c, B_a, C_a, C_b.

7⁰. **Axe radicale.** *„Laturile opuse ale exagonului format din punctele în care primul cerc al lui* LEMOINE *taie laturile triunghiului de referinţă se taie în trei puncte situate pe axul radical al cercului circumscris şi primului cerc al lui* LEMOINE.

Deoarece $B_a C_a$ (a se vedea notaţia dela punctul 5) este antiparalela dreptei BC în unghiul A, patrulaterul $B_a C_a CB$ este inscriptibil. Fie L_a punctul de întâlnire al dreptelor BC, $B_a C_a$. Avem:

$$\overline{L_a B_a} \cdot \overline{L_a C_a} = \overline{L_a B} \cdot \overline{L_a C},$$

deci L_a se află pe axul radical al primului cerc LEMOINE şi cercului circumscris. La fel se dovedeşte pentru celelalte puncte L_b, L_c.

Antiparalelele duse prin punctul lui LEMOINE *la laturile triunghiului de referinţă, taie laturile respective în trei puncte situate pe axul radical al cercului circumscris cu al doilea cerc al lui* LEMOINE.

Păstrând notaţiile folosite la punctul 6, deoarece patrulaterul $A_b A_c CB$ este inscriptibil, punctul de întâlnire ($A_b A_c$, CB) are puteri egale faţă cu cercul circumscris şi al doilea cerc LEMOINE.

Axul radical al celor două cercuri LEMOINE *trece prin punctul lui* LEMOINE *şi este perpendicular pe dreapta* OK.

In adevăr, notând B′, C′ punctele în care paralela dreptei BC taie pe AB, AC şi B″, C″ punctele în care antiparalela dreptei BC în unghiul A taie pe AB, AC, deoarece B′C′, B″C″ sunt antiparalele în unghiul A, avem

$$\overline{KB'} \cdot \overline{KC'} = \overline{KB''} \cdot \overline{KC''}.$$

K având puteri egale faţă cu ambele cercuri LEMOINE se află pe axul lor radical. Deci perpendiculara din K pe OK este axul radical căutat.

Note. Pentru alte proprietăți în legătură cu simedianele se pot consulta :
F. G. M. Exercices de Géométrie.
TRAIAN LALESCU. La Géométrie du triangle.
Pentru axele radicale ale cercurilor LEMOINE cu alte cercuri ale triunghiului a se vedea :
C. IONESCU-BUJOR : „Asupra câtorva cercuri remarcabile într'un triunghiu" — Curierul Matematic, Vol. II. Nr. 8. 1 Octomvrie 1926.
C. IONESCU-BUJOR : „Puncte colineare în legătură cu câteva axe radicale. — Revista Matematică din Timişoara, Vol. VII pag. 123. 15 Octomvrie 1927.

C. IONESCU-BUJOR.

EXERCIȚII REZOLVATE

Clasa III-a. *Exerc. 117. Un triunghiu* ABC *are* $\overline{AB} = \frac{2}{3}$ cm, $\overline{AC} = \frac{3}{5}$ cm, *și înălțimea* $\overline{AA'}$ *egală cu* $\frac{1}{2}$ cm. *Fie* A'' *punctul în care* AA' *taie cercul* ABC, *circumscris triunghiului. Să se calculeze* $\overline{A'A''}$, $\overline{A''B}$, $\overline{A''C}$.

C. I. B.

Din triunghiul dreptunghiu AA'B, avem

$$\overline{A'B}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AA'}^2,$$

deci

$$\overline{A'B} = \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{16-9}{36}} = \frac{\sqrt{7}}{6}.$$

Analog din triunghiul AA'C

$$\overline{A'C} = \sqrt{\frac{9}{25} - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{36-25}{25}} = \frac{\sqrt{11}}{5}.$$

Dar

$$\overline{A'B} \times \overline{A'C} = \overline{A'A} \times \overline{A'A''}$$

de unde

$$\overline{A'A''} = \frac{\overline{A'B} \times \overline{A'C}}{\overline{A'A}} \quad \frac{\frac{\sqrt{7}}{6} \times \frac{\sqrt{11}}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{77}}{15}. \qquad (1)$$

Din triunghiul dreptunghiu BA'A'',

$$\overline{A''B}^2 = \overline{A'A''}^2 + \overline{A'B}^2 = \frac{77}{225} + \frac{7}{36} = \frac{308+175}{225.4} = \frac{483}{900}$$

$$\overline{A''B} = \frac{\sqrt{483}}{30}. \qquad (2)$$

Din triunghiul A''A'C,

$$\overline{A''C}^2 = \overline{A'A''}^2 + \overline{A'C}^2 = \frac{77}{225} + \frac{11}{25} = \frac{77\times 99}{225} = \frac{176}{225}$$

$$\overline{A''C} = \frac{\sqrt{176}}{15}.$$

Clasa V-a. *Exerc. 566. Fie* ABCD *un patrulater cu diagonalele perpendiculare.*

a) *Prin mijloacele laturilor sale trece un cerc;*

b) *Dacă* M, N, P, Q *sunt punctele în care cercul taie a doua oară dreptele* AB, BC, CD, DA, *avem:*

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{PD}} \cdot \frac{\overline{QD}}{\overline{QA}} = 1.$$

C. I. B.

a) Fie A', B', C', D' mijloacele laturilor AB, BC, CD, DA. In triunghiul ABD, A'D' unind mijloacele a două laturi este paralelă cu BD. Analog se arată că dreptele A'B', B'C', C'D' sunt paralele cu AC, BD, AC şi cum diagonalele AC, BD sunt perpendiculare, patrulaterul A'B'C'D' are toate unghiurile drepte, deci este inscriptibil.

b) Avem:

$$\overline{MA} \cdot \overline{A'A} = \overline{QA} \cdot \overline{D'A}$$

$$\overline{NB} \cdot \overline{B'B} = \overline{MB} \cdot \overline{A'B}$$

$$\overline{PC} \cdot \overline{C'C} = \overline{NC} \cdot \overline{B'C}$$

$$\overline{QD} \cdot \overline{D'D} = \overline{PD} \cdot \overline{C'D}$$

de unde, prin înmulțire,

$$\overline{MA}.\overline{NB}.\overline{PC}.\overline{QD}.\overline{A'A}.\overline{B'B}.\overline{C'C}.\overline{D'D} =$$

$$\overline{QA}.\overline{MB}.\overline{NC}.\overline{PD}.\overline{D'A}.\overline{A'B}.\overline{B'C}.\overline{C'D}$$

și cum

$$\overline{A'A} = -\overline{A'B},\ \overline{B'B} = -\overline{B'C},\ \overline{C'C} = -\overline{C'D},\ \overline{D'D} = -\overline{D'A},$$

rezultă

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{PD}} \cdot \frac{\overline{QD}}{\overline{QA}} = 1.$$

Clasa VI-a. *Exerc. 544. Dacă* $a + b + c = 2\pi$, *avem:*

$$3 + \cos\frac{a-b}{2} + \cos\frac{b-c}{2} + \cos\frac{c-a}{2} + \cos\frac{a}{2} + \cos\frac{b}{2} + \cos\frac{c}{2}$$

$$- \cos a - \cos b - \cos c \geqslant 0.$$

C. I. B.

Să transformăm în produs suma:

$$\cos\frac{b-c}{2} + \cos\frac{a}{2} = 2\cos\frac{a+b-c}{4}\cos\frac{b-c-a}{4}$$

$$= 2\cos\frac{2\pi-2c}{4}\cos\frac{2b-2\pi}{4} = 2\cos\frac{\pi-b}{2}\cos\frac{\pi-c}{2} = 2\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}.$$

Analog,

$$\cos\frac{c-a}{2} + \cos\frac{b}{2} = 2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{c}{2}$$

$$\cos\frac{a-b}{2} + \cos\frac{c}{2} = 2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}.$$

Și cum,

$$3 - \cos a - \cos b - \cos c = (1 - \cos a) + (1 - \cos b) + (1 - \cos c)$$

$$= 2\sin^2\frac{a}{2} + 2\sin^2\frac{b}{2} + 2\sin^2\frac{c}{2},$$

expresia problemei se scrie

$$2\sin^2\frac{a}{2}+2\sin^2\frac{b}{2}+2\sin^2\frac{c}{2}+2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}+2\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}$$
$$+2\sin\frac{c}{2}\sin\frac{a}{2}=\left(\sin\frac{a}{2}+\sin\frac{b}{2}\right)^2+\left(\sin\frac{b}{2}+\sin\frac{c}{2}\right)^2$$
$$+\left(\sin\frac{c}{2}+\sin\frac{a}{2}\right)^2,$$

care este evident pozitivă.

VI. 573. Să se arate că în orice triunghiu, avem:

$$\sum\left[\frac{a^2\sin(B-C)}{\sin A}+(b^2-c^2)\cos^2A\right]=0.$$

N. M.

Ţinem seama că

$$\sin A\sin(B-C)=\sin^2B-\sin^2C$$

şi înlocuim laturile prin sinusurile unghiurilor opuse, din cauza proporţionalităţii. Rămâne

$$E=\Sigma(\sin^2B-\sin^2C)(1+\cos^2A)=$$
$$\Sigma(\sin^2B-\sin^2C)(2-\sin^2A)=$$
$$2\Sigma(\sin^2B-\sin^2C)-\Sigma\sin^2A(\sin^2B-\sin^2C)=0.$$

Dacă $A=90^0$ avem $\sin(A-B)=\sin C,\ldots$ şi relaţia devine

$$b^2(1+\cos^2B)-c^2(1+\cos^2C)=a^2\sin(B-C)$$

cazul Ex. VI: 572.

Clasa VII-a. *Exerc. 479. Să se calculeze derivata funcţiei*

$$y=\begin{vmatrix}\arcsin x & (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} & x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\\ \arcsin 2x & 2(1-4x^2)^{-\frac{1}{2}} & 8x(1-4x^2)^{-\frac{3}{2}}\\ \arcsin 3x & 3(1-9x^2)^{-\frac{1}{2}} & 27x(1-9x^2)^{-\frac{3}{2}}\end{vmatrix}$$

C. I. B.

Dacă determinantul

$$y = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

are elementele funcţiuni continui de x, derivata sa este

$$y' = \begin{vmatrix} u_1' & v_1 & w_1 \\ u_2' & v_2 & w_2 \\ u_3' & v_3 & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & v_1' & w_1 \\ u_2 & v_2' & w_2 \\ u_3 & v_3' & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1' \\ u_2 & v_2 & w_2' \\ u_3 & v_3 & w_3' \end{vmatrix}.$$

Aplicând această teoremă funcţiunii date, găsim

$$y' = \begin{vmatrix} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} & (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} & x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} \\ 2(1-4x^2)^{-\frac{1}{2}} & 2(1-4x^2)^{-\frac{1}{2}} & 8x(1-4x^2)^{-\frac{3}{2}} \\ 3(1-9x^2)^{-\frac{1}{2}} & 3(1-9x^2)^{-\frac{1}{2}} & 27x(1-9x^2)^{-\frac{3}{2}} \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} \arcsin x & x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} & x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} \\ \arcsin 2x & 8x(1-4x^2)^{-\frac{3}{2}} & 8x(1-4x^2)^{-\frac{3}{2}} \\ \arcsin 3x & 27x(1-9x^2)^{-\frac{3}{2}} & 27x(1-9x^2)^{-\frac{3}{2}} \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} \arcsin x & (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} & (1+2x^2)(1-x^2)^{-\frac{5}{2}} \\ \arcsin 2x & 2(1-4x^2)^{-\frac{1}{2}} & 8(1+24x^2)(1-4x^2)^{-\frac{5}{2}} \\ \arcsin 3x & 3(1-9x^2)^{-\frac{1}{2}} & 27(1+18x^2)(1-9x^2)^{-\frac{5}{2}} \end{vmatrix}.$$

Cum primii doi determinanţi au două coloane identice, sunt nuli. Deci

$$y' = \begin{vmatrix} \arcsin x & (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} & (1+2x^2)(1-x^2)^{-\frac{5}{2}} \\ \arcsin 2x & 2(1-4x^2)^{-\frac{1}{2}} & 8(1+24x^2)(1-4x^2)^{-\frac{5}{2}} \\ \arcsin 3x & 3(1-9x^2)^{-\frac{1}{2}} & 27(1+18x^2)(1-9x^2)^{-\frac{5}{2}} \end{vmatrix}.$$

Clasa VIII-a. *Exerc. 356. Se dă un cerc şi o parabolă cu vârful în centrul cercului.* MN *fiind o coardă a cercului şi* Δ *diametrul parabolei conjugat direcţiei* MN, *să se afle locul geometric al intersecţiei dreptelor* MN, Δ *când coarda* MN *se deplasează păstrându-şi lungimea.*

C. I. B.

Se alege centrul cercului origină a axelor de coordonate, axa parabolei axă Ox.

Ecuaţia cercului este

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

iar ecuaţia parabolei,

$$y^2 = 2px.$$

Coardele MN păstrând o lungime constantă, rămân tangente cercului

$$x^2 + y^2 = b^2.$$

Dacă m este coeficientul unghiular al unei tangente a acestui cerc, ecuaţia ei este

$$(MN) \qquad y = mx + b\sqrt{1 + m^2},$$

m este parametrul variabil.

Diametrul parabolei conjugat dreptei MN are ecuaţia

$$(\Delta) \qquad y = \frac{p}{m}.$$

Eliminând parametrul m între ecuaţiile (MN), (Δ) se găseşte

$$y = \frac{px}{y} + b\sqrt{1 + \frac{p^2}{y^2}}$$

sau

$$y^2 - px = b\sqrt{y^2 + b^2}.$$

VIII. 383. Fie M *un punct în planul unei elipse ori iperbole, cu axele* Ox, Oy, *de excentricitate* e ; P *proiecţia lui* M *pe axa* Ox *şi* N *intersecţia cu* Ox *a perpendicularei din* M *pe polara lui ; avem relaţia*

$$ON = e^2 \cdot OP.$$

N. M.

Fie

$$f(x, y) = \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} - 1 = 0$$

ecuația conicei, de excentricitate e dată de

$$e^2 = \frac{1}{A}(A - B).$$

Polara punctului $M(x_0, y_0)$ are direcția

$$m = -\frac{f'_{x_0}}{f'_{y_0}} = -\frac{Bx_0}{Ay_0}$$

și deci perpendiculara din M

$$y - y_0 = \frac{Ay_0}{Bx_0}(x - x_0)$$

care taie axa Ox $(y = 0)$ în

$$x - x_0 = -\frac{Bx_0}{A} \quad \therefore \quad x = x_0 \cdot \frac{A + B}{A} = e^2 x_0$$

$$\therefore \quad ON = e^2 \cdot OP.$$

Deci N și P sunt de aceeași parte cu O. N este interior segmentului OP la elipsă $(e < 1)$ și exterior la iperbolă.

Toate clasele. *Exerc. 218. Dacă* φ_i (I) *și* σ_i (I) *reprezintă indicatorul și suma numerelor prime cu* I *și mai mici ca el de ordinul* i, *atunci:*

$$\varphi_7[\sigma_2(1939)] = 2^{21}.$$

I. L.

In enunț s'a trecut 2^{27} în loc de 2^{21}.
Avem:

$$\sigma_1(1939) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 23 \cdot 277$$

$$\sigma_2(1939) = 2^7 \cdot 3^5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23^2 \cdot 277.$$

Apoi :

$$\varphi_1(\sigma_2) = 2^{12}.3^6.5.11.23$$

$$\varphi_2(\sigma_2) = 2^{16}.3^5.5.11$$

. . . . . .

$$\varphi_7(\sigma_2) = 2^{21}$$

T. C. 219. Să se arate că 1939 nu poate să fie un număr perfect impar.

I. L.

Se ştie că, dacă există numere perfecte impare, ele sunt de forma :

$$N = a^{4\alpha+1}.P^2$$

unde a este un număr prim de forma $(4k+1)$ şi P un număr impar, mai mare ca 1 şi nedivizibil cu a.

Cum $1939 = 7.277$, urmează că factorii lui 1939 nu pot fi grupaţi similar factorilor lui N, deci nu poate să fie număr perfect impar.

T. C. 220. Numărul 1939 poate să facă parte din şirul lui FIBONACCI ?

I. L.

1. Dacă u_n este termenul de ordinul n al şirului lui FIBONACCI avem :

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$

şirul fiind :

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,

144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, ...

deci nu găsim pe *1939*.

2. Se mai ştie că :

$$u_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n.\sqrt{5}}.$$

şi se constată că *1939* nu poate avea această formă.

T. C. 235. Pot exista cinci numere, de câte două cifre, în progresie aritmetică, scrise utilizând toate cifrele specifice?

I. L.

Progresia cerută va fi:

$(10a+b)$, $(10.c+d)$, $(10.e+f)$, $(10g+h)$, $(10.i+j)$.

Dacă r este raţia progresiei, atunci vom avea:

$$r = 10.(c-a)+d-b = 10.(e-c)+f-d$$
$$= 10.(g-e)+h-f = 10.(i-g)+j-h.$$

Apoi cum trebue să avem:

$$10.a+b+4.r < 100$$

luând primul număr 10 urmează că $r \leqslant 22$. Încercând toate valorile găsim numai soluţiunile:

r	Progresia
9	54, 63, 72, 81, 90
11	50, 61, 72, 83, 94
18	18, 36, 54, 72, 90
22	10, 32, 54, 76, 98

Până la 1 Septemvrie s'au primit soluţii bune pentru exerciţiile publicate în n-rele 7, 8 şi 9 anul VI, dela [1]):

Şcoala Centrală de fete Bucureşti

Clasa IV-a: Neagu Georgeta (IV: 499*), Popescu Niculina (IV: 488, 9, 501), Stătescu Dora (IV: 498).

1) Semnul * însoţeşte numărul unui exerciţiu rezolvat foarte bine.

Liceul de fete „Carmen-Sylva" Bucureşti.

Clasa VI: Georgescu Liliana (VI: 574).
Clasa VII-a: Vasiliu Margareta (VII: 481, 510).
Clasa VIII-a: Nissim L. Mioara (VIII: 371*).

Liceul de fete „Iulia Hajdău" Bucureşti.

Clasa VI-a: Stoia N. Sylvia (VI: 561, 7, 73, 4, 5, 81).

Liceul de fete „Regina Maria" Bucureşti.

Clasa III-a: Agapie G. Paula (III: 132).

Institutul „Ortodox" Internat Bucureşti.

Clasa III-a: Mateescu V. P. Mihaela (III: 129, 30).

Liceul de fete „Santa Maria" Brăila.

Clasa IV-a: Dimitriu Izabela (IV: 488*, 94, 508, V: 500, 1, 9).

Liceul de fete Buzău

Clasa VII-a: Angelescu Victoria (VII: 488, 99, 503, 8, T. c.: 275).

Liceul Ortodox de fete „Elena Doamna" Cernăuţi.

Clasa III-a: Scroba Raluca (III: 120).
Clasa V-a: Enescu Florica (V: 567, 8).

Liceul de fete „Domniţa Ileana" Constanţa.

Clasa VI-a: Vasiliu G. Georgeta (IV: 488, 94).

Liceul de fete „Notre Dame de Sion" Iaşi.

Clasa IV-a: Copal Estera (IV: 480, 8).

Liceul „Oltea Doamna" Iaşi.

Clasa IV-a: Balaban D. Veturia (IV: 494), Chiţu Viorica (IV: 498)
Clasa VI-a: Popovici I. Florica (VI: 544, 52, 9, 69, 70, 2, 4, 5, 8, 81), Teodorescu G. Olga (VI: 552, 9).

Liceul de fete „Carmen-Sylva" Timişoara.

Clasa VI-a: Bakonyi C. Maria (VI: 574).
Clasa VII-a: Gal Lili (VII: 494), Ionescu Lucia (VII: 494), Severineanu Maria (VII: 482).

Colegiul Național „Sf. Sava“ București.

Clasa IV-a: BÂLCU S. N. (IV: 485, 7), BEJAN M. (IV: 493, 4, 501), DIMOS FL. (IV: 488), DUMITRESCU D. (IV: 501, V: 592), GEROTA S. (IV: 494), MIȘICU V. M. (IV: 488*, 94, 501).

Clasa V-a: PAȘCANU M. (V: 591), SORESCU P. S. (V: 573, 92, 3, 4, 8).

Clasa VI-a: IONESCU G. (VI: 527, 60, 3), MARINESCU I. D. (VI: 554), MILIA P. (VI: 560).

Clasa VII-a; MIHĂILEANU A. C. (VII: 477, 8, 83, 4, 5, 8, 90, 1, 503, VIII: 372, 83, T. c.: 265)

Clasa VIII-a: PETIT NICKY (VIII: 362, 5, 70, 83, 7).

Colegiul Național „Sf. Sava“ curs seral București.

Clasa VI-a: MARINESCU I. V. (VI: 527, 71, 81, 2, 3, 5, 7).

Liceul „Matei Basarab“ București.

Clasa III-a: IEȘANU ȘT. AL. (III: 127, 8*, IV: 492).

Clasa IV-a: ANTONESCU D. E. (IV: 499), HIFT V. (IV: 494), POPLIEN S. (IV: 501).

Clasa V-a: BENJAMIN A. S. (V: 572, 95), BERCOVICI (V: 593), GHELBER G. A. (V: 594), KLANG I. J. (V: 573, 7, T. c.: 282), SAIOVICI C. E. (V: 591, 2).

Liceul „Gh. Lazăr“ București.

Clasa V-a: PRIȘCU R. AL. (V: 584, 90, 3).

Clasa VII-a: ELIAS P. (VII: 502, 6, VIII: 390), MOSCOVICI N. E. (VII: 507, 8, 9, 10, 5).

Liceul „Marele Voevod Mihai“ București.

Clasa V-a: BRATU I. E. (V: 582, 4, 90, 9).

Liceul „M. Eminescu“ București.

Clasa IV-a: PASCAL I. M. (IV: 501, V: 571).

Clasa V-a: ARON I. GH. (V: 568, 71, 2, 85, 90, 1, 2, 3, 4, 9, 600, 2, 3, 4, 5), GHEORGHE I. A. (V: 580), HERȘCOVICI M. I. (V: 567, 85), PETRESCU I. (V: 590), ZELIG F. (V: 562, 8, 92).

Liceul „Aurel Vlaicu“ București.

Clasa VI-a: MĂNESCU G. I. (VI: 559, 60, 2, 3, 6, 74, 7, 8, 81, 2).

Clasa VII-a: BARBAIANI A. I. (VII: 482, 5, 8, 94, 9, 501, 2, 3, 4, 10, 6, T. c.: 271, 2, 4, 5), BUGA M. (VII: 481, 8, 90, T. c.: 271, 4, 5).

Liceul „Gh. Șincai“ București.

Clasa V-a: CONSTANTINESCU I. E. (V: 565, 7, 80*, 1, 5, 6, 8, 90, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 600, 2, 3, 4, 5, 8, 9, VI: 579, T. c: 291).

Liceul „Sf. Iosif" Bucureşti.

Clasa VII-a: Vasilescu P. I. (VII: 482).

Institutul „Schewitz Thierrin" Bucureşti.

Clasa VI-a: Folea C. M. (VI: 560, 74), Lacriţeanu Georgescu I. (VI: 574).

Clasa VII-a: Mărgărit I. N. (VII: 494, 500, 3, 8, 17).

Liceul „Titu Maiorescu" Bucureşti.

Clasa IV-a: Albulescu V. (IV: 494).

Clasa V-a: Slăvescu V. M. (V: 573, 4, 6, T. c.: 274).

Clasa VII-a: Dăscălescu S. M. (VII: 508), Niculescu M. (VII: 481).

Liceul „Spiru Haret" Bucureşti.

Clasa IV-a: Banc E. (IV: 493).

Clasa VIII-a: Goldstein M. M. (VIII: 365), Racoviceanu Gr. V. (VIII: 371, 2, 5, 8, 80, 7, 90), Şeibulescu A. C. (VIII: 371, 2, 8).

Liceul „Sft. Andrei" Bucureşti.

Clasa VI-a: Ganea M. (VI: 560).

Clasa VII-a: Şenchi E. (VII: 494), Ştefanovici M. (VII: 494).

Liceul „Avram Iancu" Brad.

Clasa IV-a: Mihuţiu Adr. (IV: 492, 4, 8, 500, 1).

Liceul „Dr. I. Meşotă" Braşov.

Clasa IV-a; Dumitrescu O. (IV: 499), Masariu V. V. (IV: 485), Pipa I. N. (IV: 485).

Clasa V-a: Negrea D. D. (V: 590, 2).

Liceul „Andrei Şaguna" Braşov.

Clasa V-a: Farcaş E. (V: 567), Piţigoi G. I. (V: 568, 71).

Clasa VI-a: Netcu Alex. (VII: 552, 74).

Liceul „N. Bălcescu" Brăila.

Clasa VII-a: Cotariu M. (VII: 482, 94, 6, 501, 2, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 2, 5, T. c.: 282).

Liceul „Mircea cel Bătrân" Constanţa.

Clasa VI-a: Sotiriu H. Th. (VI: 561, 9, 71, 2, 3, 6, 8).

Liceul „Fraţii Buzeşti" Craiova.

Clasa IV-a: Marian M. D. (IV: 473, 80, 93, 4, V: 580*, 2, 4).

Liceul Militar Craiova.

Clasa IV-a: Călinescu N. (IV: 494), Cioroianu C. (IV: 494).

Liceul Militar fost Chişinău.

Clasa V-a; Voicu Gh. (V: 580, 7, 90, 2).
Clasa VI-a: Miroslav Th. (VI: 559, 60).
Clasa VII-a: Bârsan C. (VII: 468, 71, 86).
Clasa VIII-a: Toma V. (VIII: 366).

Liceul „Ştirbei Vodă" Călăraşi.

Clasa VII-a: Ionescu N. V. (VII: 494, 508, 15).

Liceul „Ioniţă Assan" Caracal.

Clasa VI-a: Musceleanu S. V. I. (VI: 560, 70, 81, 8, T. c.: 282).

Liceul militar fost Cernăuţi.

Clasa IV-a: Cimbru V. M. (IV: 497, 8, 50, V: 592), Căpriţă Gh. I. (IV: 490, 4, 7, 8, 500, 1, V: 592), Gajus T. (IV: 498, 500, 1), Mihăiţă D. (IV: 494), Staicu C. (IV: 455, 85, 94, 7, 8, 9, 500, 1, 4, V: 531, 7, 92, 600, T. c.: 282), Teodorescu G. A. (IV: 493, 4, 500), Vasiliu D. (IV: 485, 94, 7, 9*, 500, 1, V: 590, 2, 3, 8).
Clasa VI-a; Miroslov T. (VI: 581).

Liceul „Mitropolitul Silvestru" Cernăuţi.

Clasa V-a: Volschi Al. (V: 567, 8, 71).

Liceul „Unirea" Focşani.

Clasa VIII-a: Baruch M. (VIII: 365).

Liceul „Ion Maiorescu" Giurgiu.

Clasa VII-a; Petrescu R. G. (VII: 503, 4, 7, 9).

Liceul „C. Negruzzi" Iaşi.

Clasa VI-a: Manolache Tr. (VI: 544, 75, 81).
Clasa VII-a; Balaban C. A. (VII: 494).
Clasa VIII-a: Petrescu A. (VIII: 390).

Liceul militar Iaşi.

Clasa III-a: Bogza I. N. (III: 123), Bulibaşa M. (III: 123, 32, 7, 8, V: 560), Bughiu C. (III: 123, 4, 32), Constantin V. (III: 123, 7, 32), Coşniţă F. (III: 123), Dumitriu (III: 123), Edu E. (III: 123, 32, 7, 41), Florin N. M. (III: 123), Gulianu D. (III: 127, V: 600), Mazilu D. (III: 123, 9),

Mihăilescu Ş. (III: 123, 5, 33, 7), Păstrăvanu Tr. (III: 123, 9, 32), Popescu V. I. (III: 123, 9, 37), Sava M. (III: 137, V: 599, 60), Sburlan N. (III: 123, 9, 37), Vasilescu T. I. (III: 141), Zaharia R. (III: 123, 37, 8, 9, V: 600).

Clasa IV-a: Teodorescu V. (IV: 497, 8, 500, V: 590).

Clasa V-a: Căruntu Fl. (V: 590), Milea C. (V: 501, 90, 2).

Clasa VI-a: Bogdan Gh. (T. c.: 291), Drăghicescu P. P. (VI: 574, 9, 80, 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 97, VII: 514, 5, VIII: 398, T. c.: 282, 91, 2), Popa N. A. (VI: 559, 60, 72, 4, 5, 8, 88, 9), Rădulescu I. (VI: 581, 2, 4), Romanescu C. (VI: 559, 60), Zamfir I. (VI: 552, 60, 72, 4, 5).

Clasa VII-a: Pintilie I. (VII: 508).

Clasa VIII-a: Jiletcovici Gh. A. (VIII: 390, 1, 3, 4, T. c.: 282), Pascaru I. C. (VIII: 395, T. c.: 282), Petre N. I. (VIII: 390, T. c.: 282), Prigoreanu Gh. (VIII: 395, T. c.: 282), Rohr Al. (VIII: 390, T. c.: 282), Turcu R. S. (VIII: 390, 3).

Liceul „Naţional" Iaşi.

Clasa V-a: Nacht H. (V: 584).

Liceul „I. C. Brătianu" Piteşti.

Clasa V-a: Popescu G. M. (V: 565, 7, 8, 73, 4, 6, 7, 80, 1, 3, 4, 5, 6, 9, VI: 569, 70, 2).

Liceul „Sf. Petru şi Pavel" Ploeşti.

Clasa IV-a: Jupceanu N. N. (IV: 480*, V: 568*), Vintilescu A. Gh. (IV: 468*, 501).

Clasa V-a: Cătuneanu Tr. (V: 587, 90, 2, 3, 8), Moţoiu C. (V: 583, 7, 600), Weitzman I. I. (V: 572).

Clasa VI-a: Bereanu B. (VI: 569, 70, 5, 7, 81, 2, 8, VII: 495, 502, 4, 8, VIII: 387, T. c.: 282).

Liceul militar fost Târgu-Mureş.

Clasa IV-a: Mihalcu I. (IV: 500).

Clasa V-a: Marian D. (V: 586), Mateucă Fl. (V: 586), Miclea M. (V: 586), Petrescu S. (V: 586), Vascenici I. (V: 586).

Clasa VI-a: Diaconescu N. (VI: 574), Rafiroiu R. (VI: 574, 81, 2) Zaharia Gh. (VI: 575, 81, 2).

Clasa VII-a: Anghelichi R. (T. c.: 274).

Liceul militar „N. Filipescu" Târgovişte.

Clasa III-a: Marinescu M. (III: 120), Pojogean M. (III: 129).

Clasa V-a: Antonescu S. (V: 571), Burs G. (V: 571), Barbici I. (V: 571), Ceauşelu (V: 571), Cristea P. C. (V: 571), Drăgulescu D. (V: 587), Dumitrescu D. (V: 571), Filipidescu M. (V: 571), Gheorghiu M.

(V : 571), Mihuț T. G. (V : 571), Moldoveanu V. (V : 571), Pârligras Șt. Tr. (V : 571), Percea I. M. (V : 571), Popescu I. P. (V : 571), Săveanu I. (V : 571), Strol R. G. (V : 571), Stoianovici S. (V : 587), Ținculescu C. N. (V : 571).

Clasa VII-a : Bărbulescu V. (VII : 494), Bârlea-Suhățeanu G. V. (VII : 504, 8, 9, 10, T. c. : 291), Dragomir Adr. (VII : 494), Lăcătuș V. (VII : 494), Mândrescu A. (VII : 494), Popescu S. (VII : 494), Stănoiu R. (VII : 494).

Liceul „C. Diaconovici Loga" Timișoara.

Clasa IV-a : Iacob I. (IV : 480, 8*, 92, 3, 4, 6, 7, 8, 500, 1, 2, V : 584, 600, T. c. : 282, 91), Iosif I. (V : 580).

Clasa VII-a : Backonyi C. (VII : 502, 4, 5, 7, 9, 10, 3, 4, 5, 6, 7, T. c. : 282, 91), Boleanțu L. (VII : 494).

Liceul „Sf. Haralambie" Turnu-Măgurele.

Clasa VI-a : Popescu Petre (VI : 551, 4), Rizea Olteanu (VI : 551).

Liceul „Traian" Turnu-Severin.

Clasa V-a : Rovența C. (V : 590, 2).

Clasa VI-a : Filip Gh. Gh. (VI : 560, 74).

Liceul „Alex. Lahovari" Râmnicul Vâlcea.

Clasa V-a : Geantă B. (V : 590).

EXERCIȚII PROPUSE

Soluțiile exercițiilor propuse în acest număr se primesc până la 1 Ianuarie 1941

Clasa III-a. *Exerc. 142.* Un bazin poate fi umplut de un robinet în $2\frac{1}{2}$ ore, iar de altul în $1\frac{1}{4}$ ore. Bazinul plin poate fi golit printr'o gură de scurgere, de pe fundul său, în $1\frac{1}{3}$ ore. Se dă drumul deodată la ambele robinete, dar din neglijență este lăsată gura de scurgere.

In momentul când bazinul este complect umplut, să se afle ce volum de apă a fost risipit degeaba.

V. Gh.

III. 143. Să se construiască un romb ABCD cunoscând diagonala sa $\overline{AC}$, în mărime şi poziţie, precum şi poziţia unui punct M de pe una din laturile rombului.

V. Gh.

III. 144 Fie P proiecţia unui punct M de pe cateta AB a triunghiului dreptunghiu ABC pe înălţimea AD (adică piciorul perpendicularei MP pe AD), iar N intersecţia perpendicularei ridicate în P, pe dreapta PC, cu dreapta AB. Să se demonstreze că segmentele AM şi BM sunt egale.

G. G. C.

III. 145. Se duc în cercul O două coarde AB şi AC situate de aceeaşi parte a centrului O, din care se duc respectiv perpendicularele OB' şi OC' pe cele două coarde.

Să se arate că:

a) $\sphericalangle BAC = \sphericalangle C'OB'$

b) $\sphericalangle B'C'O + \sphericalangle OAB' = 180^0$.

H. P. I.

III. 146. Pe dreapta BC a laturei triunghiului ABC se ia de oparte şi de alta punctele D şi E astfel că $\overline{BD} = \overline{AB}$ şi $\overline{CE} = \overline{AC}$. Să se demonstreze că dreapta ce uneşte vârful A cu O, centrul cercului ADE, este bisectoare unghiului BAC.

G. G. C.

III. 147. Să se facă operaţiile:

$$\frac{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{11}}}}{\dfrac{5}{1+\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{11}}}} - \frac{4}{\left(2-\dfrac{10}{11}\right)+\dfrac{1}{2-\dfrac{10}{11}}}.$$

H. P. I.

Clasa IV-a. *Exerc. 510.* Fiind date polinoamele

$$P_0 = 1, \quad P_1 = x + 1, \quad P_2 = x^2 + x + 1, \quad P_3 = x^3 + x^2 + x + 1,$$

să se scrie valorile expresiunilor

$$E_1 = (x+1)^2 \ ; \ E_2 = (x-1)^2 \ ; \ E_3 = (x+1)(x-1);$$

$$E_4 = (x+1)^3 \ ; \ E_5 = (x-1)^3$$

cu ajutorul polinoamelor P_0, P_1, P_2, P_3 astfel încât să găsim numai expresiuni omogene şi de gradul întâi în raport cu literele P.

V. GH.

IV. 511. Desemnaţi un triunghiu ABC. Construiţi în interiorul său un punct M astfel încât

$$\text{aria MBC} = \frac{1}{2} \text{ aria MCA} = \frac{1}{3} \text{ aria MAB.}$$

V. GH.

IV. 512. Să se arate că

$$(13a + 12b)^2 \equiv 25a^2 + 24(2a + 3b)(3a + 2b).$$

N. M.

IV. 513. Să se descompună expresia

$$(a^2 b^2 + 1)^2 - (a^2 + b^2)^2$$

într'un produs de şase factori.

G. D. S.

IV. 514. Să se verifice identitatea

$$a(b+c)\left[\frac{a+b}{a+c} + \frac{a+c}{a+b}\right] + b(c+a)\left[\frac{b+c}{b+a} + \frac{b+a}{b+c}\right]$$

$$+ c(a+b)\left[\frac{c+a}{c+b} + \frac{c+b}{c+a}\right] - (ab + bc + ca) \equiv (a+b+c)^2.$$

G. D. S.

IV. 515. Să se calculeze expresia

$$E \equiv a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b) + bc(b-c)(2a-b-c)$$

$$+ ca(c-a)(2b-c-a) + ab(a-b)(2c-a-b).$$

G. D. S.

*IV. 516.**) Să se reprezinte numerele (exacte)

$$+3-\sqrt{7} \quad \text{şi} \quad -3-\sqrt{7};$$

apoi să se reprezinte media lor aritmetică şi media lor geometrică.

O. N. Ţ.

*IV. 517.**) Să se reprezinte pe o axă numerele algebrice (exacte):

$$+3-\sqrt{2}+\sqrt{3} \; ; \quad +3+\sqrt{2}-\sqrt{3} \; ; \quad -2+\sqrt{6};$$

apoi să se calculeze: *a) produsul lor; b) suma patratelor lor; c)* suma cuburilor lor.

O. N. Ţ.

IV. 518. Construiţi un patrat ABCD cu latura de 6 cm, apoi prelungiţi latura AD cu segmentul $\overline{DE}$ cât o treime din diagonala $\overline{AC}$ şi uniţi punctul E cu mijlocul F al laturei $\overline{AB}$. Dreapta EF întâlneşte latura CD în G, iar pe diagonala BD în H.

Să se calculeze în numere exacte (nu cu aproximaţie) *perimetrul* şi *aria* patrulaterului BCGH.

O. N. Ţ.

IV. 519. Două cercuri tangente exterioare au razele respectiv de $3+\sqrt{2}$ şi $2-\sqrt{3}$. Să se afle:

a) La ce distanţă de centrul cercului mare este întâlnită dreapta centrelor de tangenta comună exterioară.

b) Mărimea segmentului situat pe această tangentă comună, cuprins între punctele de contact.

C. I. B.

Clasa V-a. *Exerc. 611.* Se dă un punct O în plan şi se consideră unghiurile u, $2u$, $3u$, ... cu vârful în O, adiacente consecutiv (luate în acelaşi sens). Să se determine unghiul (elementar) u astfel încât o pereche din aceste unghiuri să fie adiacente complimentare.

V. Gh.

---

*) Vezi: *Algebra elementară* de O. N. Ţino, editura Cugetarea Bucureşti.

V. 612. Să se arate că dacă avem

$$b = \frac{3ac}{2(a+3c)}$$

avem şi relaţia

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{4b^2} + \frac{1}{9c^2} + \frac{2}{3ac} = \frac{1}{b}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{3c}\right).$$

V. GH.

V. 613. Să se arate, că dacă între numerele a, b, c are loc relaţia

$$a = \frac{mbc}{nb + pc}$$

unde m, n, p sunt trei numere date, avem relaţia

$$\left(\frac{m}{a}\right)^2 > \frac{p}{c} \cdot \frac{n}{b}.$$

O. N. Ţ.

V. 614. Să se arate că

$$\Sigma (x+a)(y+a^2)(z+a^3) = \Sigma (x+a)(y+a^3)(z+a^2).$$

N. M.

V. 615. Să se simplifice expresiunea

$$\frac{ab(a^2+b^2)x^2y^2 + ab(a^2+b^2)(x^2+y^2)^2 + a^2b^2xy(x^2+y^2) + xy(x^2+y^2)(a^2+b^2)^2}{ab(a^2-b^2)x^2y^2 + ab(a^2+b^2)(x^4-y^4) + a^2b^2xy(x^2-y^2) + xy(x^2+y^2)(a^4-b^4)}.$$

G. G. C.

V. 616. Să se rezolve sistemul

$$ax + by = (a+b)^2 + a^2 + b^2$$
$$bx + ay = (a+b)^2 + 2ab.$$

N. M.

V. 617. Să se simplifice fracţia:

$$\frac{ax(x-a) + bx(x-b) + (a+b)(x-a)(x-b) - 3ab(a+b)}{(a+b)(x^2-a^2-b^2) - 2abx}.$$

G. D. S.

V. 618. Intr'un cerc de rază R se înscrie un triunghiu ABC astfel încât laturile AB şi AC sunt respectiv latura patratului şi a triunghiului echilateral înscrise în cerc.

Să se calculeze latura BC.

Se vor examina cele două cazuri posibile.

G. D. S.

V. 619. Pe laturile Ax şi Ay ale unghiului drept xAy se iau respectiv punctele B şi C. Se împarte unghiul xBC în trei părţi egale prin dreptele Bz, Bt (sensul de la Bx la BC) şi tot aşa unghiul yCB prin dreptele Cu, Cv (sensul dela Cy la CB).

1°. Să se arate că dreptele Bz şi Cu sunt paralele, iar Bt şi Cv (care se taie în D) sunt perpendiculare.

2°. Tangenta în D la cercul ABC taie dreptele Ax şi Ay respectiv în M şi N. Să se arate că D este mijlocul segmentului MN.

G. D. S.

V. 620. Două cercuri tangente interioare au razele $(a+\sqrt{b})$ şi $(a-\sqrt{b})$. Dreapta centrelor taie cercurile în A, B.

O secantă care trece prin punctul de contact T şi face un unghiu de 30° cu dreapta centrelor taie cercurile în A', B'. Să se calculeze lungimile diagonalelor patrulaterului AA'B'B.

C. I. B.

Clasa VI-a. *Exerc. 598.* Se dă funcţia

$$f(x) = ax + b.$$

1°. Să se arate că oricare ar fi valorile lui a, b, x, şirul

$$f(x)\ ,\ f(x+1)\ ,\ f(x+2),\ldots,\ f(x+p-1)\ldots$$

este o progresie aritmetică.

2°. Ştiind că această progresie are *100* termeni şi că pentru $x = 1$, progresia începe cu 5 şi are drept sumă pe 10400, să se determine funcţia $f(x)$.

V. GH.

VI. 599. Se dau numerele diferite A şi B astfel în cât:

$$\log A = c,\ aaaaa\ \ ;\ \ \log B = c,\ bbbbb,$$

unde $a = b + n$.

Să se arate că

$$\sqrt[n]{\frac{A}{B}} = 1{,}2915.$$

V. Gh.

VI. 600. Să se arate, că dacă laturile unui triunghiu sunt în progresie geometrică, raţia progresiei este cuprinsă între numerele

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad \text{şi} \quad \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

G. G. C.

VI. 601. O progresie geometrică de *nouă* termeni are primul termen $a_1 = \sqrt{6}$, iar ultimul termen $a_9 = \sqrt[18]{6^{25}}$.

1°. Să se calculeze raţia.

2°. Să se calculeze suma progresiei cu trei zecimale exacte.

G. D. S.

VI. 602. Să se rezolve sistemul

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}\right)^2-\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{y}+\frac{1}{z}\right)^2=3$$

$$\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{y}+\frac{1}{z}+1\right)^2+\left(\frac{3}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{z}\right)^2=9$$

$$\left(\frac{3}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{z}\right)^2+\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{2}+1\right)^2=22.$$

H. P. I.

VI. 603. Să se rezolve sistemul

$$ax = by = cz \quad ; \quad bcx + cay^3 + abz^5 = 0.$$

C. I. B.

VI. 604. Fiind date două cercuri (O) şi (I) tangente exterior în punctul A, de raze r şi R, să se construiască o secantă comună ABCD (tăind cercul O în A_1 şi B_1, iar pe I în C şi D) astfel ca secanta $\overline{AD}$ să fie împărţită de cele două cercuri în trei părţi egale ($\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$). Discuţie.

O. N. Ţ.

VI. 605. Sunt date două cercuri (O) şi (I) de raze r şi R, tangente în A, exterior unul altuia şi tangenta comună AT. Fie B şi C punctele unde dreapta centrelor OI taie respectiv cercurile (O) şi (I); M un punct pe tangenta AT; apoi D şi E punctele unde dreptele MB şi MC taie respectiv cercurile (O) şi (I). Să se determine punctul M astfel ca segmentul $\overline{DE}$ să aibă o lungime dată $2a$. Discuţie.

O. N. Ţ.

VI. 606. Fiind date un plan P, un punct A exterior planului P şi o dreaptă D în planul P, se construieşte perpendiculara IM pe planul Q determinat de dreapta D şi punctul A. Să se arate că dacă I este proiecţia punctului A pe dreapta D, când dreapta D se mută în planul P paralel cu ea însăşi, dreapta IM rămâne în acelaşi plan.

O. N. Ţ.

VI. 607. Sunt date un plan P, un punct A exterior planului P şi două drepte D şi D' paralele în planul P. Fie Q, Q' respectiv planele determinate de punctul A cu fiecare din dreptele D şi D'; apoi I şi I' proiecţiile punctului A respectiv pe dreptele D şi D'.

Să se arate, că unghiul IAI' măsoară unghiul diedru al celor două plane Q, Q'.

O. N. Ţ.

Clasa VII-a *). *Exerc. 519.* Să se arate că

$$(1+x)^m-(1-x)^m=\frac{4x}{m+1}\left[C_{m+1}^2+2C_{m+1}^4x^2+3C_{m+1}^6x^4+\ldots\right].$$

N. M.

VII. 520. Să se verifice că

$$\frac{C_m^n\cdot C_{m-n}^n}{C_m^{2n}}=\prod_1^n\frac{i+n}{i}\qquad(m>2n).$$

N. M.

---

*) Vezi *Culegerea de Probleme de Algebră* de D-l A. G. IOACHIMESCU, Inginer-Profesor; Partea II-a, ediţia IV. Editura *Gazeta Matematică*.

VII. 521. Să se determine m, n, p în aşa fel încât în desvoltarea lui

$$\left(x^m + \frac{1}{x^p}\right)^n$$

termenii de rangul *12* şi *24* să aibă respectiv pe x la puterile *11* şi *5* şi să existe şi un termen liber.

H. P. I.

VII. 522. Să se calculeze

$$\sum_{p=1}^{50} C_{101}^{2p+1}.$$

C. I. B.

VII. 523. Să se stabilească relaţia

$$\sum_{p=0}^{m} C_{m+2n}^{n+p} C_{n+2m}^{n+2m-p} \equiv \sum_{p=0}^{m+n} C_{m+n}^{p} C_{2m+2n}^{2m+2n-p}.$$

O. N. Ţ.

VII. 524. Să se găsească coeficientul termenului care conţine pe x^5 în desvoltarea

$$(2x^4 + x^3 - 6x^2 + x + 2)^{45}.$$

O. N. Ţ.

VII. 525. Numerele p şi q fiind reale şi astfel că $(p^2 - q)$ nu este patrat perfect, iar x_1 şi x_2 rădăcinile ecuaţiei

$$x^2 + 2px + q = 0,$$

să se găsească condiţia la care trebue să satisfacă numerele întregi m, n, r, s pentru ca expresiunea

$$E \equiv x_1^n (x_2 + 2p)^{2s} + x_2^m (x_1 + 2p)^{2r}$$

să fie o câtime raţională.

O. N. Ţ.

VII. 526. Numerele p şi q fiind reale şi astfel că $(p^2 - q)$ nu este patrat perfect, să se găsească condiţia la care trebue să satisfacă numerele întregi m, n, r, s pentru ca expresia:

$$E \equiv \frac{x_1^n (x_2 + 2p)^{2s} - x_2^m (x_1 + 2p)^{2r}}{\sqrt{p^2 - q}}$$

să fie o câtime rațională.

O. N. Ţ.

VII. 527. Să se calculeze suma

$$S = \sum_1^n [(n-2)(n+1)(4n+7)+14]$$

şi să se arate că ea este pozitivă oricare ar fi $n > 1$.

O. N. Ţ.

VII. 528. Să se calculeze suma:

$$S = \sum_{n=1}^{n} (n^5 - 3n^4 - 5n^3 + 15n^2 + 4n - 12).$$

O. N. Ţ.

Clasa VIII-a. *Exerc. 408.* Fie punctul A (a, o). Să se determine un punct B astfel încât: $m \cdot \overline{AB} = \overline{AA'}$ (A' fiind situat pe AB) şi ca A''' fiind simetricul originei axelor de coordonate în raport cu A, iar A'' simetricul lui A''' faţă de B, punctele A'' şi A' să fie simetrice în raport cu axa OY.

H. P. I.

VIII. 409. Se consideră punctul M (a, b) şi punctul N (a', b') unde:

$$a' = \frac{(1-m^2)a + 2mb - 2mn}{1+m^2}, \quad b' = \frac{-(1-m^2)b + 2ma + 2n}{1+m^2}.$$

Să se afle mediatoarea segmentului MN.

Să se explice de ce nu depinde de a, b, a', b'.

N. M.

VIII. 410. Raportul anarmonic a patru puncte A, B, C, D pe o dreaptă poate fi definit şi subt forma

$$r = \left(\frac{1}{AD} + \frac{1}{BC}\right) : \left(\frac{1}{AC} + \frac{1}{BD}\right).$$

Caz particular $r = -1$.

N. M.

VIII. 411. In vârfurile A, B, C ale unui triunghiu sunt aplicate trei forţe paralele de intensităţi respectiv tgA, tgB, tgC. Să se determine punctul de aplicare al rezultantei lor şi să se arate că intensitatea ei este tgA . tgB . tgC.

G. G. C.

VIII. 412. Se consideră pe dreapta $2x + 3y - 6 = 0$ punctele A, B, C, D de abscise 0, 1, 2, 3.

Fie A', B', C', D' punctele în care dreptele OA, OB, OC, OD întâlnesc dreapta $3x + 4y - 12 = 0$.

Să se arate că avem relaţia

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{C'A'}}{\overline{C'B'}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} : \frac{\overline{D'A'}}{\overline{D'B'}}.$$

C. I. B.

VIII. 413. Pe o axă orientată D faţă cu origina dată O sunt date punctele

$$A(+1) \; ; \; B(+2) \; ; \; C(-3) \; ; \; D(-4).$$

Să se găsească pe această axă un punct M astfel că

$$35\,\overline{MA}^4 - 2463\,\overline{MC}^4 = 35\,\overline{MB}^4 - 543\,\overline{MD}^4.$$

O. N. Ţ.

VIII. 414. Fiind date pe o axă D orientată faţă cu origina O punctele A(+1); B(+2); C(−3); D(−4), să se determine pe această axă un punct M astfel ca să avem:

$$14\,\overline{MA}^4 - 6\,\overline{MC}^4 = 14\,\overline{MB}^4 - \overline{MD}^4.$$

O. N. Ţ.

VIII. 415. Fie M un punct pe latura BC a triunghiului ABC, P şi N punctele în care bisectoarele unghiurilor AMB şi AMC întâlnesc laturile AB şi AC.

Dreptele AM, BN, CP sunt concurente?

C. I. B.

VIII. 416. Fie ABCD un patrulater convex, I intersecţia diagonalelor, E şi F intersecţiile dreptelor AD cu BC şi AB cu CD; P şi R intersecţiile dreptelor EI cu DC şi FI cu AD. Să se arate că dreptele AP şi RC se intersectează pe dreapta BD.

C. I. Ţ.

VIII. 417. Fie un punct D luat pe mediana dusă din vârful A al unui triunghiu ABC; B_1 şi C_1 intersecţiile dreptelor AB cu CD şi AC cu BD. Să se arate că dreptele BC şi B_1C_1 sunt paralele.

C. I. Ţ.

Exerciţii Generale *). *E. G. 298.* Să se arate că numărul

$$N = 1a\,2b\,3c\,4d\,5e\,6f\,7g\,8h\,9i$$

este divizibil cu 9, dacă cifrele notate cu litere sunt în progresie aritmetică.

I. L.

E. G. 299. In ce caz produsul

$$11 \times 1a1 \times 1bb1$$

poate să fie un patrat perfect?

I. L.

E. G. 300. In ce caz numărul $1a\,9b4\,c1$ este divizibil cu 11?

I. L.

E. G. 301. In ce sistem de numeraţie *1940* devine *3770*?

I. L.

---

*) *Exerciţiile Generale* se adresează elevilor de toate clasele, fiind socotite ca făcând parte din activitatea extraşcolară.

E. G. 302. Numerele $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ fiind prime absolute, care este cea mai mare valoare a lui n pentru care avem:

$$1940 = p_1 p_2 \ldots p_n + 1.$$

I. L.

E. G. 303. Să se găsească numărul de patru cifre *abbc*, al cărui compliment aritmetic este tot de această formă.

GH. B.

E. G. 304. Să se calculeze rădăcina patrată a lui *19* cu aproximație de $^1/_{17}$.

GH. B.

E. G. 305. Pentru ce valori ale lui n, suma

$$S = n^6 - n^4 - n^2 + 1$$

se divide prin *45*?

GH. B.

E. G. 306. Se cere numărul N, știind că dacă după el se scrie 8N se obține patratul lui 3N.

GH. B.

E. G. 307. Să se demonstreze că, suma inverselor a trei numere consecutive, este o fracție zecimală periodică mixtă.

G. G. C.

E. G. 308. Să se arate că expresia

$$E = 5 \cdot 3^{3n-3} + 7 \cdot 2^{3n} \cdot 11^{n-1},$$

unde n este întreg diferit de zero, este divizibilă cu 61.

G. G. C.

E. G. 309. Să se demonstreze că suma patratelor a șase numere prime mai mari ca 3, nu poate fi un patrat perfect.

G. G. C.

E. G. 310. Intre razele cercurilor tritangente unui triunghiu dreptunghic avem

$$r_a^3 + r_b^3 + r_c^3 - r^3 = 2a^3.$$

N. M.

E. G. 311. Intre razele cercurilor tritangente unui triunghiu dreptunghic, avem

$$r^4 + r_a^4 + r_b^4 + r_c^4 = 2a^4 + 4S^2.$$

N. M.

E. G. 312. Care este patratul, care micşorat cu 7 dă îndoitul unui alt patrat?

O. N. Ţ.

INSTRUCŢIUNI

a) Soluţiile exerciţiilor se vor scrie cu cerneală, pe sferturi de coală şi numai pe o parte a foii.

Dacă va fi nevoie de mai multe foi pentru soluţionarea unui exerciţiu, ele se vor coase sau lipi în partea stângă. Figurile, ce vor fi necesare pentru urmărirea exerciţiului se vor construi îngrijit, pe foi aparte, având formatul arătat mai sus şi se vor coase sau lipi odată cu soluţia.

Nu se vor trimite soluţiile mai multor exerciţii pe aceeaşi foaie.

b) Redactarea soluţiilor se va face astfel:

Sus, se va scrie numărul exerciţiului, dedesubt enunţul astfel cum e publicat în revistă, cu iniţialele propunătorului, apoi soluţia clar compusă, iar la sfârşit, iscălitura rezolvitorului în ordinea următoare:

Numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie, însoţit de clasa şi şcoala pe care o urmează.

c) Nu se vor lua în considerare soluţiile iscălite de 2 sau mai mulţi corespondenţi, nici soluţiile exerciţiilor propuse la clase inferioare aceleia în care corespondentul se află. Pentru redijarea soluţiilor se pot vedea indicaţiile din Nr. 1, Vol. IV.

d) Soluţiile se primesc timp de 3 luni dela propunerea exerciţiului, numai dela abonaţii „Suplimentului cu Exerciţii" al Gazetei Matematice, pe adresa Locot. C. D. Ionescu-Ţiu, Casa Gazeta Matematică, Calea Griviţei 158, Bucureşti 2.

Drepturile de reproducere rezervate Societăţii «Gazeta Matematică».

Elevii claselor VI, VII şi VIII, cu bogată activitate la această revistă îşi pot lărgi cadrul activităţii soluţionând probleme din „Gazeta Matematică".

In Biblioteca „Gazetei Matematice" au apărut şi se găsesc la adresa indicată mai sus, următoarele:

III. **N. Abramescu,** Lecţiuni elementare de Algebră superioară, pentru clasa VIII-a ştiinţifică, Ediţia VI-a . . . . . Lei 120

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** Vocabular Matematic . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** Culegere de Probleme de Geometrie . . . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. Istoric, învăţăminte. Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 200 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I. (Goniometrie) revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** Culegere de Probleme de Aritmetică. Partea I. Aritmetica raţionată . . . . . Lei 190

XIV. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I-a. (Trigonometrie plană). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

XV. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 120

XVI. **G. Ţiţeica,** Culegere de Probleme de Geometrie Analitică. Partea I. Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 140

XVII. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 240

Biblioteca Istorică a GAZETEI MATEMATICE

1. Elementele lui **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană) tradusă din limba greacă de *V. Marian* . . . . . Lei 160

Suplimentul cu Exerciţii. Abonamentul anual (9 numere) Lei 50

„Gazeta Matematică" apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimite pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ"

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158. — Bucureşti 2.
(Telefon: 3-9803).

M. O., IMPRIMERIA NAŢIONALĂ — C. 65.565

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL VII. No. 2 1 NOEMVRIE 1940

BIBL... CENTRALA
„ASOCIAŢIUNII"
SIBIIU

SOCIETATEA GAZETA MATEMATICĂ
CALEA GRIVIŢEI, 158. BUCUREŞTI 2. — TELEFON 3-9803

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL VII. No. 2 — 1 NOEMVRIE 1940

ABONAMENTUL LEI 50 PE AN (9 numere)

Soluţii şi orice corespondenţă pe adresa:

Locot. C. D. IONESCU-ŢIU

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviţei 158. — Bucureşti 2

CONGRUENŢE

1°. **Teoria numerelor** este o continuare a aritmeticii.

Să reamintim câteva propoziţiuni cunoscute din aritmetică.

I. Diferenţa a două numere întregi a şi b este divizibilă cu un număr întreg p, dacă cele două numere au acelaşi rest în raport cu p.

II. Suma $(a+b)$ a două numere întregi se divide cu un întreg p dacă cele două numere sunt respectiv divizibile cu p, sau suma resturilor lor face p.

III. Un produs neefectuat de mai mulţi factori este divizibil cu un întreg p dacă printre factorii primi ai factorilor produsului, se află cuprinşi factorii primi ai lui p (sau ca p să dividă produsul resturilor factorilor produsului în raport cu p).

2°. **Definiţie.** Prima propoziţie din (1°) poate fi scrisă simbolic sub una din formele:

$$a-b=\text{mult. } p \quad ; \quad a-b=\mathcal{M}p \quad ; \quad a-b=c\,.\,p$$

şi atunci se mai spune că cele două numere întregi a şi b sunt *echivalente*. Această echivalenţă se mai poate enunţa şi sub una din formele:

I. Două numere întregi se zic *congruente* sau echivalente în raport cu numărul p, numit modul, dacă diferenţa lor se divide cu modulul p.

II. Două numere întregi se zic congruente, dacă împărţite cu modulul p dau acelaşi rest.

III. Două numere se zic congruente dacă unul este restul celuilalt faţă de modulul p.

Se vede că această ultimă definiție introduce o extindere a noțiunii de rest.

Pentru scrierea congruențelor vom folosi notația dată de GAUSS:

$$a \equiv b \pmod{p}$$

care se citește: a *este congruent cu* b *după modulul* p.

Avem evident:

$$a \equiv a \pmod{p}.$$

Exemple:

$$1939 \equiv 1914 \pmod{5}$$

căci au față de 5 restul 4.

3°. **Proprietăți.** I. Două congruențe de același modul p se pot aduna sau scădea parte cu parte fără ca modulul să se schimbe.

Dacă:

$$a \equiv b \pmod{p} \qquad \alpha \equiv \beta \pmod{p},$$

cu propozițiile din 1° avem:

$$a - b \equiv 0 \pmod{p} \qquad \alpha - \beta \equiv 0 \pmod{p}$$

$$\therefore \qquad a - b \pm (\alpha - \beta) \equiv 0 \pmod{p}$$

sau după o convenabilă aranjare:

$$a \pm \alpha \equiv b \pm \beta \pmod{p}.$$

II. Două congruențe după un același modul se pot multiplica parte cu parte fără ca modulul să se schimbe.

Dacă:

$$a \equiv b \quad , \quad \alpha \equiv \beta \pmod{p}$$

sau putem scrie

$$a = cp + r \quad , \quad b = c'p + r \quad , \quad \alpha = \gamma p + r' \quad , \quad \beta = \gamma' p + r'$$

și după (1°. III) resturile lui $a\alpha$ și $b\beta$ față de p sunt aceleași rr', deci

$$a\alpha \equiv b\beta \pmod{p}$$

c. c. e. d. d.

Cu ajutorul acestor două proprietăți vom semnala încă o întreagă serie de alte proprietăți analoage cu cele ale egalităților.

III. In I dacă $\alpha = \beta$ reese că: putem adăoga sau scădea acelaşi număr întreg cu ambele părţi ale unei congruenţe fără ca modulul să se schimbe.

IV. Putem trece dintr'o parte în alta un număr dar cu semnul schimbat.

V. Două numere congruente cu un al treilea după acelaşi modul sunt congruente între ele după acelaşi modul. Facem în I $\alpha = b$ şi adunăm parte cu parte. Congruenţele sunt transitive.

VI. Putem înmulţi ambele părţi ale unei congruenţe cu acelaşi număr. Facem în II $\alpha = \beta = \lambda$ şi avem:

$$\lambda a \equiv \lambda b \pmod{p}.$$

Analog avem şi:

$$a^n \equiv b^n \pmod{p}.$$

Ultimele concluzii conduc la:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i \equiv \sum_{i=1}^{n} b_i \lambda_i \pmod{p}$$

unde λ_i sunt întregi pozitivi, negativi sau zero, şi dacă:

$$a_1 \equiv b_1 \ , \ a_2 \equiv b_2, \ldots, a_n \equiv b_n \pmod{p}.$$

VII. Dacă $f(x)$ este un polinom cu coeficienţi întregi şi dacă:

$$a \equiv b \pmod{p}$$

avem

$$f(a) \equiv f(b) \pmod{p}$$

ceea ce se poate uşor vedea ţinând seamă de (VI. 3°).

4°. **Aplicaţii.** I. Divizibilitatea cu 9 şi cu 11; 5. Ştim că orice număr poate fi scris sub forma unui polinom în x de gr. n cu coeficienţi întregi mai mici decât x, care se numeşte baza sistemului de numeraţie.

Avem

$$10 \equiv 1 \pmod{9} \quad \therefore \quad f(10) \equiv f(1) \pmod{9}$$

însă:

$$f(1) = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0$$

care sunt cifrele numărului scris în baza 10.

Analog:

$$10 \equiv -1 \pmod{11} \quad \therefore \quad f(11) \equiv f(-1) \pmod{11}$$

$$f(-1) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_i .$$

Pentru divizibilitatea cu 5 avem:

$$10 \equiv 0 \pmod{5}$$

$$\therefore \quad f(10) \equiv f(0) \pmod{5}$$

însă $f(0) = a_0$ şi numărul să fie divizibil cu 5 trebue ca restul să se împartă cu 5 deci $a_0 = 0$ sau 5.

II. Teorema lui EULER. *Nu există nici un polinom care pentru valori întregi ale lui* x *să ia valori numai numere prime.*

Fie că pentru $x = a$ şi p un număr prim avem:

$$f(a) = p.$$

Dacă n este un întreg atunci

$$a + n \,.\, p \equiv a \pmod{p}$$

atunci din (3. VII) avem:

$$f(a) \equiv f(a + n \,.\, p) \pmod{p}$$

sau

$$p \equiv f(a + n \,.\, p) \pmod{p}$$

sau

$$f(a + n \,.\, p) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Cu alte cuvinte orice valoare am da lui x căpătăm un număr care se divide cu p, deci nu poate fi prim, decât dacă

$$f(a + n \,.\, p) = p$$

oricare ar fi valoarea lui n; cum polinomul nostru e de gr. m, numărul întreg n poate lua oricâte valori; sau egalitatea este adevărată pentru $(m + 1)$ valori date lui x deci polinomul se reduce la o constantă.

5°. **Proprietăţi pentru diviziune.** I. Două numere întregi congruente după modulul p sunt congruente după orice divizor al modulului.

II. Două numere a şi b congruente pentru două module diferite p şi q sunt congruente pentru un modul egal cu c. m. m. c. m. al modulelor.

Fie

$$p = \mu.n \qquad q = \mu.\nu$$

şi

$$\alpha \equiv 0 \ , \pmod{p}$$

$$\alpha \equiv 0 \ , \pmod{q}$$

$$\therefore \quad \alpha \equiv 0 \pmod{\mu.n\nu}$$

sau de $\alpha = a - b$ avem

$$a \equiv b \pmod{\mu.\nu n}.$$

c. c. e. d.

III. Dacă cele două părţi ale unei congruenţe sunt multipli unui număr prim cu modulul; putem împărţi ambele părţi ale congruenţei cu acel număr fără ca modulul să se schimbe.

Fie q prim cu p adică $[q, p] = 1$ şi

$$q \,.\, \alpha \equiv 0 \pmod{p}$$

avem evident

$$\alpha \equiv 0 \pmod{p}$$

sau de $\alpha = a - b$

$$qa \equiv qb \pmod{p}$$

$$\therefore \quad a \equiv b \pmod{p}.$$

IV. Dacă avem două congruenţe de acelaşi modul p şi între numerele ce compun a doua congruenţă şi modulul este un divizor comun δ, împărţind parte cu parte cele două congruenţe — dacă împărţirea este posibilă — se obţine o nouă congruenţă după modulul p/δ.

Fie

$$ac \equiv bd \pmod{p} \quad , \quad c \equiv d \pmod{p}$$

şi

$$c = \alpha \,.\, \delta \quad , \quad d = \beta \,.\, \delta \quad , \quad p = \gamma \,.\, \delta$$

avem din (5°. III)

$$bc \equiv bd \pmod{p} \quad \therefore \quad ac \equiv bc \pmod{p},$$

iar din (5°. I) reese

$$ac \equiv bc \quad \left(\mathrm{mod}\ \frac{p}{\delta}\right)$$

şi din (5°. III):

$$a \equiv b \quad \left(\mathrm{mod}\ \frac{p}{\delta}\right).$$

c. c. e. d. d.

Consecinţe: Dacă $\delta = 1$ regăsim pe (5°. III); dacă $c = \alpha$, $\delta = 1$ reese că: împărţind ambele părţi ale unei congruenţe — dacă împărţirea se face exact — cu un număr prim cu modulul se obţine o congruenţă după acelaşi modul.

Dacă: $c = d$ şi $[c, p] = \delta$ avem: împărţind ambele părţi ale aceleeaşi congruenţe — când împărţirea se face exact — cu un număr ce are drept *c. m. m. c. d.* cu modul pe δ se are o congruenţă după un modul egal cu vechiul modul împărţit prin c. m. m. c. d.: δ.

6°. **Aplicaţii.** Să se arate că oricare ar fi n

$$1939^{1914n} + 1209^{6n} - 729^{319n} - 1$$

se divide cu 121.

Avem:

$$1939 \equiv 3 \pmod{121}$$

$$1209 \equiv -1 \pmod{121}$$

$$\therefore \quad 1939^{1914n} \equiv 3^{1914n} \quad ; \quad 1209^{6n} \equiv 1 \pmod{121},$$

iar

$$729 = 27^2 = 3^6 \quad \therefore \quad 729^{319n} = 3^{1914n}$$

deci

$$1939^{1914n} + 1209^{6n} - 729^{319n} - 1 \equiv 0 \pmod{121}$$

c. c. e. d. d.

7°. **Problema** cea mai principală a congruenţelor este de a găsi care sunt valorile întregi ale lui x aşa ca pentru polinoamele $f(x)$ şi $\varphi(x)$ să avem:

$$f(x) \equiv \varphi(x) \pmod{p}$$
$$f(x) - \varphi(x) \equiv 0 \pmod{p}$$
$$\therefore \quad F(x) \equiv 0 \pmod{p}$$

problema care se pune este de rezolvarea unei asemenea congruenţe, pentru care dacă avem o soluţie atunci, avem o infinitate care se grupează apoi în clase de soluţii; dar nu ne vom ocupa aici de această problemă.

Note: Pentru completare a se consulta: unul din tratatele, „Teoria numerelor" de E. LUCAS, TANNERY, FRITZ-PATRIC, etc.

HAR. P. IONESCU.

EXERCIŢII REZOLVATE

Toate clasele. *Exerc. 195. Să se arate că.*

$$1839^{100} > 1938 \times 1828^{99}.$$

I. L.

In problema *T. C. 193* din Supl. G. M., Nr. 4, Anul V, am arătat că avem:

$$\left(\frac{N+1}{N}\right)^n > 1 + \frac{n}{N+1}$$

relaţie care se mai poate scrie:

$$(N+1)^{n+1} > (N+n+1) \times N^n.$$

Făcând $N = 1838$ şi $n = 99$ găsim relaţia:

$$1839^{100} > 1938 \times 1838^{99}.$$

In problema 195 avem însă în membrul al doilea al neegalităţei numărul 1828 în loc de 1838, deci cu atât mai mult neegalitatea va fi accentuată.

T. C. 196. Dacă $\varphi(l)$ *reprezintă indicatorul lui* l, *atunci avem:*

$$\varphi(100!) = M\,2^{100}.$$

I. L.

Această problemă constitue o aplicație a problemei Nr. 3354 din G. M. XL — 178, unde se demonstrează că dacă $n \geqslant 5$ avem:

$$\varphi(n!) = M\,2^{n}.$$

Prin „nota matematică" Nr. 36 din G. M. XLV — 472 se arată că putem avea:

$$\varphi(100!) = M\,2^{100+k}$$

unde k este un număr natural.

T. C. 212. Dacă $\sigma(l)$ *reprezintă suma numerelor prime cu* l *și mai mici decât el, iar* $\varphi_i(l)$ *indicatorul de ordinul* i *a lui* l, *atunci avem:*

$$\sigma[\varphi_{4+n}(1939)] = 2^{10-2n}.$$

I. L.

Avem:

$$\varphi_1\ (1939) = 2^3 . 3^2 . 23$$

$$\varphi_2\ (1939) = 2^4 . 3 . 11$$

$$\varphi_3\ (1939) = 2^5 . 5$$

$$\varphi_4\ (1939) = 2^6$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi_{4+n}(1939) = 2^{6-n}$$

cu condiția ca $0 < n \leqslant 6$.

Atunci:

$$\sigma(2^{6-n}) = 2^{10-2n}.$$

T. C. 231. Dacă $\pi(l)$ *reprezintă produsul numerelor prime cu* l *și mai mici decât el, iar* $\varphi_i(l)$ *indicatorul de ordinul* i *a lui* l, *atunci avem:*

$$\pi[\varphi_7(1939)] = 105.$$

I. L.

Avem:

$$\varphi_1(1939) = 2^3 . 3^2 . 23$$
$$\varphi_2(1939) = 2^4 . 3 . 11$$
$$\varphi_3(1939) = 2^5 . 5$$
$$\varphi_4(1939) = 2^6$$
$$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$
$$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$
$$\varphi_7(1939) = 2^3.$$

Conform celor stabilite în G. M. XXXI — 83 avem:

$$\pi(a^\alpha) = \frac{a^\alpha !}{a^{\alpha-1} ! \, a^{a^{\alpha-1}}} .$$

Deci:

$$\pi(2^3) = \frac{2^3 !}{2^2 ! \, 2^{2^2}} = 105.$$

T. C. 270. In cercul O *se dă patrulaterul* ABCD *având diagonalele* BD *şi* AC. *Fie* E *proecţia lui* B *pe* DC; F *intersecţia lui* BE *cu* O *şi* H *intersecţia laturilor opuse* AB, DC. *Perpendiculara în* H *pe* DC *este întâlnită în* C' *şi* D' *de* CF *şi* DF. *Să se arate că triunghiurile* CAC' *şi* DAD' *sunt dreptunghice.*

GH. B.

In cercul O unghiurile ADF, ACF, ABF sunt egale ca având aceeaşi măsură, jumătatea arcului AF. Dar unghiurile ABF, AHC' sunt egale ca corespondente faţă de paralelele EF, HC' tăiate de transversala AH. Rezultă că

$$\sphericalangle ADC' = \sphericalangle ADD' = \sphericalangle AHD.$$

Deci patrulaterele AC HC' şi AC HD' sunt inscriptibile. Cum unghiul DHC' este drept rezultă că şi unghiurile DAC', DAD' sunt drepte.

Observaţie. Dacă FBE şi HC' sunt două drepte paralele oarecare şi dacă se fac aceleaşi construcţii, atunci se demonstrează pe aceeaşi cale că

$$\sphericalangle DHC' = \sphericalangle DAC' = \sphericalangle DAD'.$$

Până la 10 Septemvrie s'au primit soluții la exercițiile propuse în n-rul 1, dela[1]):

Colegiul Național „Sf. Sava" București.

Clasa IV-a: Bâlcu Șt. N. (IV: 500, 1).
Clasa V-a: Dumitrescu F. D. (V: 615, 6, 20), Mișicu V. M. (V: 611*, 2, 3, 4, 5*, 6, 20).
Clasa VII-a: Ciurescu I. F. (VII: 508).

Liceul „Matei Basarab" București.

Clasa IV-a: Ieșan Ș. A. (IV: 510, 2*, V: 614).

Liceul „Spiru Haret" București.

Clasa VIII-a: Racoviceanu G. V. (VIII: 394, 5, 7).

Liceul „Aurel Vlaicu" București.

Clasa VIII-a: Davidescu M. A. (VIII: 408, 9, 15, 7).

Liceul „Marele Voevod Mihai" București.

Clasa VI-a: Mateescu G. E. (VI: 598, 9).

Liceul „Dr. I. Meșotă" Brașov.

Clasa V-a: Georgescu M. M. (V: 592).

Liceul militar Iași.

Clasa III-a: Bulibașa G. M. (III: 141).

Liceul Internat „C. Negruzzi" Iași.

Clasa VI-a: Manolache C. T. (VI: 582, 5, 90).

Liceul „Sf. Petru și Pavel" Ploești.

Clasa IV-a: Iupcianu N. (IV: 488, 569, V: 571).

Liceul „Traian" Turnu-Severin.

Clasa VI-a: Corâciu I. C. (VIII: 397, T. c.: 291).

---

1) Semnul * însoțește numărul unui exercițiu rezolvat foarte bine.

EXERCIȚII PROPUSE

Soluțiile exercițiilor propuse în acest număr se primesc până la 1 Februarie 1941

Clasa III-a. *Exerc. 148.* Se dă un triunghiu isoscel ABC cu $\sphericalangle A = 120^0$. Fie D piciorul înălțimii dusă din B.

Să se arate că $\overline{CD} = 3 \cdot \overline{AD}$.

Ce alte proprietăți are figura?

O. G. R.

III. 149. In căderea liberă a corpurilor spațiile sunt proporționale cu patratele timpurilor.

O bilă în cădere liberă străbate în $\frac{2}{3}$ de secundă 6,58 m.

Cât străbate în $\frac{3}{4}$ de secundă?

C. I. B.

III. 150. Un trapez isoscel are baza mare de 12 cm, baza mică de 8 cm și laturile neparalele fac un unghiu de 45^0 pe baza mare.

1. Să se construiască trapezul.
2. Să i se afle perimetrul și suprafața.
3. Cu cât trebue prelungite laturile neparalele până să se întâlnească?

N. M.

III. 151. Care e capitalul din care s'a depus $\frac{3}{5}$ cu $3^0/_0$ și $\frac{2}{7}$ cu $7^0/_0$ și după 5 ani s'a strâns dobânda de 1900 lei?

N. M.

III. 152. Trei capitaluri fac în sumă 20.800 lei. Primul împrumutat cu $4^0/_0$ pe 5 luni devine împreună cu dobânda lui 3600 lei; ultimul aduce în trei ani cu $6^0/_0$, lei 1800. Pe cât timp trebue să dăm la dobândă al doilea capital pentru a avea dela acesta 45 lei?

V. Gh.

III. 153. Se dau două vase comunicante A, B. In vasul A se toarnă apă cu densitatea 1,08, în vasul B se toarnă mercur cu densitatea 13,6. Până la ce înălţime trebue turnat mercur, pentru a echilibra o coloană de 0,48 m apă în A ?

C. I. B.

Clasa IV-a. *Exerc. 520.* Laturile unui triunghiu sunt de 3, 4 şi 5 metri. Să se calculeze raza cercului înscris triunghiului.

O. G. R.

IV. 521. Să se arate că:

$$x(y+b)+(x+a)(y+2b)+y(x+2a)$$
$$\equiv y(x+a)+(y+b)(x+2a)+x(y+2b).$$

N. M.

IV. 522. Dacă

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{4}{x}=0$$

avem şi

$$(ax+b)^2+(bx+a)^2=a^2+b^2.$$

N. M.

IV. 523. Să se arate că dacă $s=a+b+c$, atunci avem:

$$(as+bc)(bs+ca)(cs+ab)=(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2.$$

G. G. C.

IV. 524. Să se arate că expresiunea:

$$E\equiv(x^2+x+1)^3+(x^2-x+1)^3$$

este divizibilă cu $2(x^2+1)$.

O. N. Ţ.

IV. 525. Să se arate că expresia:

$$E \equiv (x+1)^6 + (x-1)^6$$

este divizibilă cu $2(x^2+1)$.

Să se demonstreze apoi că numărul $N = 544^6 + 542^6$, este divizibil cu 5897×64.

O. N. Ţ.

IV. 526. Se dau două plane paralele P şi Q, şi punctele A, B în planul P; C, D în planul Q. Dreptele AC, BC, BD, AD sunt întâlnite în punctele E, F, G, H de un plan R paralel cu P, Q şi la egală depărtare de ele.

1. Să se arate că figura EFGH este un paralelogram.

In ce caz devine romb, dreptunghiu, patrat?

2. Ce se întâmplă cu paralelogramul EFGH, când segmentele AB şi CD rămânând în planele respective capătă mişcări de translaţie?

G. D. S.

IV. 527. Un trapez isoscel are baza mare de $(a+\sqrt{3})$, baza mică $(a-\sqrt{2})$ şi înălţimea $a+1$. Pe laturile trapezului se construesc, în exterior, patrate (latura fiecărui patrat este cât latura corespunzătoare a trapezului). Să se afle: 1) suma ariilor patratelor construite pe baze, 2) diferenţa dintre această sumă şi suma ariilor patratelor construite pe laturile egale, 3) să se scadă această diferenţă din aria trapezului.

C. I. B.

IV. 528. Raza unui cerc este $\sqrt{2}-1$. Să se afle diferenţa dintre aria exagonului regulat înscris în cerc şi aria patratului înscris, apoi înălţimea unui triunghiu a cărui bază este $\sqrt{3}$ şi are aria egală cu diferenţa calculată.

C. I. B.

IV. 529. Un paralelipiped dreptunghiu are cele trei dimensiuni:

$$\sqrt{3}-\sqrt{2}\ ,\quad 2-\sqrt{3}\ ,\quad 2-\sqrt{2}.$$

Să se calculeze volumul paralelipipedului, suprafața totală și suma volumelor celor 3 cuburi ce ar avea ca muchii segmente cu lungimile date mai sus. Să se compare această sumă cu volumul paralelipipedului.

C. I. B.

Clasa V-a. *Exerc. 621.* Să se arate că, dacă $a+b+c=0$, avem și egalitatea:

$$\sum\left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b-c}{c-a}-\frac{c-a}{b-c}\right)=9.$$

O. G. R.

V. 622. Dacă numerele a și b sunt astfel că

$$a+b=2 \quad \text{și} \quad a^3+b^3=-4,$$

atunci

$$a^2+b^2=0.$$

O. G. R.

V. 623. Să se determine A, B, C, D astfel ca

$$x^3 \equiv A+B(x+1)+C(x+1)(x+2)+D(x+1)(x+2)(x+3).$$

O. G. R.

V. 624. Dacă într'un triunghiu ABC, H fiind ortocentrul, avem $\overline{AH}=\overline{BC}$, atunci $\sphericalangle A=45^0$ și reciproc.

O. G. R.

V. 625. Să se rezolve sistemul:

$$\frac{a}{a^2x+b^2y}-\frac{b}{b^2x+a^2y}+ab\frac{a+b}{a-b}=0$$

$$\frac{b}{a^2x+b^2y}+\frac{a}{b^2x+a^2y}-ab=0$$

și să se verifice soluțiile.

G. D. S.

V. 626. Să se calculeze expresia:

$$E \equiv \frac{\left[1+\frac{1}{x}+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right]^2}{\left[1+\frac{1}{x}-\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right]^2} - \left(1+x-\frac{1}{2+\frac{1}{x}}\right)^2.$$

H. P. I.

V. 627. Să se rezolve sistemul

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}\right)^{\frac{1}{2}} + 2\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{y}+\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{2}} = 13$$

$$2\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{y}+\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{2}} + 3\left(\frac{3}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{z}\right)^{\frac{1}{2}} = 28$$

$$\left(\frac{3}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{z}\right)^{\frac{1}{2}} + 3\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}\right)^{\frac{1}{2}} = 15.$$

H. P. I.

V. 628. să se găsească trei numere întregi consecutive, astfel încât suma rapoartelor lor luate două câte două să fie un număr întreg.

G. G. C.

V. 629. Fie $\overline{AB}$ şi $\overline{AC}$ două coarde respectiv egale cu latura dodecagonului şi a patratului înscrise în cercul O de rază r; iar B' proiecţia lui B pe AC. Se cere să se calculeze:

a) aria ABC pentru $r = 6$ m.

b) segmentele BB' şi AB'.

H. P. I.

V. 630. Dacă A_1, A_2, A_3,... sunt picioarele oblicelor duse din M de aceeaşi parte a perpendicularei $\overline{MA}$ la aceeaşi dreaptă Δ şi astfel ca diferenţa $\overline{MA_n} - \overline{MA_{n-1}}$ să fie o constantă, atunci segmentele $A_{n-1}A_n$ descresc neîncetat.

G. G. C.

Clasa VI-a. *Exerc. 608.* Dacă a şi b satisfac egalităţilor

$$a + b = a^3 + b^3 = 3,$$

atunci:

$$a(a-1)^3 = b(b-1)^3.$$

O. G. R.

VI. 609. Să se rezolve sistemul:

$$(x + 2y + 1)^2 + (3x - y + 1)^2 = 12$$

$$8x^2 - 3y^2 - 10xy = 14 - 4\sqrt{2}.$$

H. P. I.

VI. 610. Să se rezolve ecuaţia:

$$[\log(x+1)]^2 + \log 4(x^2-1) \cdot \log(x+1)$$

$$- \log(x+1)(x-1)^2 \log(x-1) + (\log 2)^2 + \log(x^2-1)\log 2 = 0.$$

G. G. C.

VI. 611. S_n fiind suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice, să se determine progresia ştiind că raportul sumelor S_{pn} şi S_{qn} este constant oricare ar fi n şi să se arate că ea nu depinde de p şi q.

G. G. C.

VI. 612. Se dă: $\operatorname{tg}\alpha = a - b$; $\operatorname{tg}\beta = a + b$.
Să se arate că avem:

$$\operatorname{cotg}(\alpha - \beta) + \operatorname{cotg}(\alpha + \beta) = -\frac{(a-b)[(a+b)^2+1]}{2ab}.$$

V. Gh.

VI. 613. Să se arate că, dacă

$$\operatorname{tg} u = 2\sqrt{3} \quad ; \quad \operatorname{tg} v = \frac{\sqrt{3}}{7},$$

iar u şi v sunt arce mai mici ca 180^0, atunci

$$u - v = 60^0.$$

N. M.

VI. 614. Să se arate că

$$\sin^2 x \cos y + \cos^3 x = \sin^2 y \cos x + \cos^3 y.$$

N. M.

VI. 615. Fiind date relaţiile:

$$\operatorname{tg}(x+y) = a \quad ; \quad \operatorname{tg}(y+z) = b \quad ; \quad \operatorname{tg}(z+x) = c,$$

să se calculeze $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{tg} y$, $\operatorname{tg} z$ în funcţie de a, b, c.

G. G. C.

VI. 616. Se dau un cerc (C) într'un plan (R) şi un punct în spaţiu A. Fie M un punct mobil pe (C); A' proiecţia lui A pe planul (R); P mijlocul lui $\overline{AM}$; Q mijlocul lui $\overline{A'P}$.

Să se afle locul geometric al punctului Q.

V. GH.

VI. 617. Se dau trei plane paralele (P), (Q), (R) şi punctele A, B în planul (P); C, D în planul Q. Dreptele AC, BC, BD, AD întâlnesc planul (R) în punctele E, F, G, H.

1. Să se arate că figura EFGH e un paralelogram.

In ce cazuri devine romb, dreptunghiu, patrat?

2. Ce se întâmplă cu paralelogramul EFGH, când segmentele $\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$, rămânând în planele respective, capătă mişcări de translaţie?

G. D. S.

Clasa VII-a. *Exerc. 529.* Să se descompună în factori:

$$(a^2-b^2)^5+(b^2-c^2)^5+(c^2-a^2)^5.$$

O. G. R.

VII. 530. Dacă a, b, c sunt reale şi $a+b+c=0$, atunci

$$\frac{a^5+b^5+c^5}{a^3+b^3+c^3}>0.$$

O. G. R.

VII. 531. Dacă

$$\sum\frac{a-b}{x-y}=0 \quad \text{şi} \quad \sum(a-b)(x-y)=0,$$

atunci:

$$\sum(a-b)(x-y)^3=0.$$

Sumele se obţin prin permutările circulare simultane ale cantităţilor

$$a, b, c, d \quad \text{şi} \quad x, y, z, u.$$

O. G. R.

VII. 532. Să se calculeze suma:

$$S=1.2.5.7+2.3.6.8+3.4.7.9+\ldots$$
$$+(n+1)(n+2)(n+5)(n+7).$$

H. P. I.

VII. 533. Să se determine m, n, p în aşa fel încât în desvoltarea

$$\left(x^m+\frac{1}{x^n}\right)^p$$

termenii de rangul *12* şi *24* să aibă pe x respectiv la puterile *1* şi *5* şi să avem şi un termen liber.

H. P. I.

VII. 534. Să se găsească coeficientul lui x^{14} din desvoltarea:

$$(x^4 - 3x + 1)^8.$$

G. D. S.

VII. 535. Să se verifice că:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & c \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ d & 0 & 0 & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & d \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & a & a & 0 \\ c & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & c \\ d & b \end{vmatrix}.$$

N. M.

VII. 536. Să se discute sistemul

$$2x - 3y + z = -1$$

$$x + \lambda y + z = 4$$

$$4x - 9y + z = \alpha.$$

Caz particular $\lambda = 0$; $\alpha = -11$.

N. M.

VII. 537. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z+1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \alpha\Delta; \quad \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z+1 \\ x+a & y+b & z+c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \beta\Delta;$$

$$\begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z+1 \\ x+a & y+b & z+c \\ x+a^2 & y+b^2 & z+c^2 \end{vmatrix} = \gamma\Delta,$$

unde Δ este determinantul VANDERMONDE de ordinul al III-lea în raport cu a, b, c.

Caz particular $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 2$.

Verificarea pentru cazul particular.

G. D. S.

VII. 538. Se dă ecuaţia:

$$P_n x^2 + A_m^n \cdot x + 30\, C_m^n = 0,$$

care admite rădăcina dublă $x_1 = x_2 = 10$.

Să se determine m şi n.

V. GH.

Clasa VIII-a. *Exerc. 418.* Dacă $a + b + c = 0$, să se arate că avem relaţiile:

$$\frac{a^5 + b^5 + c^5}{5} = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

G. G. C.

VIII. 419. Să se rezolve ecuaţia

$$x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 7x + 12 = 0$$

ştiind că poate fi transformată într'o ecuaţie de gradul al doilea în raport cu un anumit trinom de gradul al doilea.

Să se arate apoi că în general, dacă procedeul este posibil, el se realizează într'o infinitate de moduri.

G. G. C.

VIII. 420. Fiind date ecuaţiile:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad ; \quad a'x^2 + b'x + c' = 0$$

cu rădăcinile (α, β) şi (α', β'), să se formeze ecuaţia, care admite rădăcinile

$$u = (\alpha - \alpha')(\beta - \beta') \quad ; \quad v = (\alpha - \beta')(\beta - \alpha')$$

şi să se arate că ea admite:

1. rădăcini egale, dacă una din ecuaţiile date are o rădăcină dublă.
2. rădăcini reale, dacă rădăcinile ecuaţiilor date sunt reale sau imaginare în acelaşi timp.
3. rădăcini imaginare, dacă una din ecuaţiile date admite rădăcini imaginare, iar cealaltă reale.

G. G. C.

VIII. 421. Dacă *4* şi *3* sunt resturile împărţirii polinomului $P(x)$ prin $(x-1)$ şi $(x-3)$, care este restul împărţirii polinomului prin produsul $(x-1)(x-3)$?

G. G. C.

VIII. 422. In triunghiul ABC fie A' simetricul lui C faţă de B; C' situat pe AB şi B' pe AC astfel ca

$$\overline{C'A} - \overline{C'B} = \frac{1}{2}\overline{AB} \quad ; \quad \overline{B'A} - \overline{B'C} = \frac{1}{5}\overline{AC}.$$

Să se arate că punctele A', B', C' sunt colineare.

N. M.

VIII. 423. Fie r raportul anarmonic al punctelor A, B, C, D de abscise a, b, c, d. Avem relaţia

$$(1-r)(ab+cd) = c(b-ar) + d(a-br).$$

Caz particular: $r = -1$.

N. M.

VIII. 424. Să se rezolve ecuaţia:

$$\cos 2x + \cos x + \cos^2 x + \cos^3 x = 0.$$

G. D. S.

VIII. 425. Fie ABC un triunghiu dreptunghiu isoscel şi un punct M pe cercul (O) circumscris triunghiului.

Fie A', B', C' intersecţiile dreptelor (MA, BC); (MB, CA); (MC, AB) şi (Γ) cercul circumscris triunghiului A'B'C'.

1. Să se arate că M descriind cercul (O), cercurile (Γ) sunt ortogonale unui cerc fix şi au centrele colineare.

2. A", B", C" fiind celelalte intersecţii ale cercului (Γ) cu laturile triunghiului ABC, să se arate că dreptele AA", BB", CC" sunt concurente într'un punct N.

3. Să se demonstreze încă că dreapta MN trece printr'un punct fix, când M variază.

G. G. C.

VIII. 426. Dreptele

$$2x+y+a=0 \quad , \quad ax+3y+2=0 \quad , \quad 4x+ay+3=0$$

formează un triunghiu.

Să se afle locurile geometrice ale vârfurilor triunghiului şi locul centrului de greutate când a variază.

C. I. B.

VIII. 427. Să se construiască curba de ecuaţie:

$$y^2 - px = b\sqrt{y^2+b^2}$$

şi să se afle aria mărginită de curbă, axa yy' şi paralelele duse la $x'x$ prin două puncte de ordonate p, b.

C. I. B.

Exerciţii Generale*). *E. G. 313.* Să se demonstreze că produsul a două numere terminate cu cifra 6, se termină prin 36, dacă suma cifrelor zecilor este divizibilă prin 5.

G. G. C.

E. G. 314. Dacă restul împărţirii numărului N prin 9 este diferit de 0, 1, 8, atunci numărul N nu poate fi cub perfect.

G. G. C.

E. G. 315. Să se găsească un număr de două cifre egal cu dublul produsului cifrelor sale.

G. G. C.

E. G. 316. Să se demonstreze că suma patratelor a cinci numere întregi consecutive, nu poate fi un patrat perfect.

G. G. C.

---

*) *Exerciţiile Generale* se adresează elevilor de toate clasele, fiind socotite ca făcând parte din activitatea extraşcolară.

E. G. 317. Să se găsească fracția ireductibilă $\frac{A}{B}$ știind că:

1) numitorul B are 6 divizori,

2) produsul AC are 8 divizori, C fiind cel mai mic număr astfel ca produsul BC să fie patrat perfect,

3) produsul ABC^3 are 32 divizori.

4) numărătorul A fiind ales cel mai mic posibil, numitorul B este deasemenea cel mai mic posibil.

G. G. C.

E. G. 318. Numărul: $[a\,(a \pm 2) + 3]$ poate să fie patrat perfect?

I. L.

E. G. 319. Numărul $1a\,9b\,4c\,1$ poate să fie patrat perfect?

I. L.

E. G. 320. Să se calculeze x astfel încât să avem:

$$\varphi_x(1941) = 1.$$

I. L.

E. G. 321. In ce caz produsul

$$(n-1)(3n+1).$$

este divizibil cu 5^3?

I. L.

E. G. 322. Câte bipatrate de opt cifre se divid cu 13?

I. L.

E. G. 323. Știind că S(I) reprezintă suma divizorilor lui I și φ(I) indicatorul lui I, în ce caz avem?

$$\varphi[S(2^\alpha)] > S[\varphi(2^\alpha)].$$

I. L.

E. G. 324. Să se rezolve ecuația:

$$\varphi_x(1940) = \varphi_y(1941)$$

unde φ_i(I) reprezintă indicatorul de ordinul i al lui I.

I. L.

E. G. 325. Numărul $1x\,9x\,4x1$ poate să fie divizibil cu 13?

I. L.

E. G. 326. Numărul $19\,a\,a\,41$ poate să fie patrat perfect?

I. L.

E. G. 327. Numărul $1a\,9b\,4c\,1$ poate să fie cub perfect?

I. L.

INSTRUCȚIUNI

a) Soluțiile exercițiilor se vor scrie cu cerneală, pe sferturi de coală și numai pe o parte a foii.

Dacă va fi nevoie de mai multe foi pentru soluționarea unui exercițiu, ele se vor coase sau lipi în partea stângă. Figurile, ce vor fi necesare pentru urmărirea exercițiului se vor construi îngrijit, pe foi aparte, având formatul arătat mai sus și se vor coase sau lipi odată cu soluția.

Nu se vor trimite soluțiile mai multor exerciții pe aceeași foaie.

b) Redactarea soluțiilor se va face astfel:

Sus, se va scrie numărul exercițiului, dedesubt enunțul astfel cum e publicat în revistă, cu inițialele propunătorului, apoi soluția clar compusă, iar la sfârșit, iscălitura rezolvitorului în ordinea următoare:

Numele de botez complet, inițiala părintelui, numele de familie, însoțit de clasa și școala pe care o urmează.

c) Nu se vor lua în considerare soluțiile iscălite de 2 sau mai mulți corespondenți, nici soluțiile exercițiilor propuse la clase inferioare aceleia în care corespondentul se află. Pentru redijarea soluțiilor se pot vedea indicațiile din Nr. 1, Vol. IV.

d) Soluțiile se primesc timp de 3 luni dela propunerea exercițiului, numai dela abonații „Suplimentului cu Exerciții" al Gazetei Matematice, pe adresa Locot. C. D. Ionescu-Țiu, Casa Gazeta Matematică, Calea Griviței 158, București 2.

Drepturile de reproducere rezervate Societății «Gazeta Matematică».

Elevii claselor VI, VII şi VIII, cu bogată activitate la această revistă îşi pot lărgi cadrul activităţii soluţionând probleme din „Gazeta Matematică".

In Biblioteca „Gazetei Matematice" au apărut şi se găsesc la adresa indicată mai sus, următoarele:

III. **N. Abramescu,** Lecţiuni elementare de Algebră superioară, pentru clasa VIII-a ştiinţifică, Ediţia VI-a . . . . . Lei 120

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** Vocabular Matematic . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** Culegere de Probleme de Geometrie . . . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. Istoric, învăţăminte. Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . Lei 200 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. Lei 150

XII. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I. (Goniometrie) revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** Culegere de Probleme de Aritmetică. Partea I. Aritmetica raţionată . . . . . Lei 190

XIV. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I-a. (Trigonometrie plană). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

XV. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 120

XVI. **G. Ţiţeica,** Culegere de Probleme de Geometrie Analitică. Partea I. Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 140

XVII. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 240

Biblioteca Istorică a GAZETEI MATEMATICE

1. Elementele lui **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană) tradusă din limba greacă de *V. Marian* . . . . . Lei 160

Suplimentul cu Exerciţii. Abonamentul anual (9 numere) . . . Lei 50

„Gazeta Matematică" apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimite pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ"

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158. — Bucureşti 2.
(Telefon: 3-9803).

M. O., IMPRIMERIA NAŢIONALĂ - — C. 66.808

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL VII. No. 3 1 DECEMVRIE 1940

SOCIETATEA GAZETA MATEMATICĂ
CALEA GRIVIŢEI, 158. BUCUREŞTI 2. — TELEFON 3-9803

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL VII. No. 3 — 1 DECEMVRIE 1940

ABONAMENTUL LEI 50 PE AN (9 numere)

Soluţii şi orice corespondenţă pe adresa:

Locot. C. D. IONESCU-ŢIU

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviţei 158. — Bucureşti 2

TEOREMELE FERMAT, EULER, WILSON ŞI LUCAS

1. **Teorema lui** FERMAT. *Dacă* p *este un număr prim, iar* a *un număr oarecare, avem congruenţa*

$$a^p - a \equiv 0 \pmod{p}$$

ceea ce se poate interpreta şi astfel: *într'un sistem de numeraţie cu baza un număr prim, toate puterile inferioare bazei ale unui număr oarecare se termină prin aceeaşi cifră.*

Demonstraţia se obţine imediat, observând că teorema este adevărată pentru $a = 0$ şi 1 astfel încât admiţând-o adevărată pentru a să arătăm că este adevărată şi pentru $a + 1$.

Avem

$$(a+1)^p \equiv a^p + 1 \pmod{p}$$

şi scăzând $a + 1$ din ambii membri, obţinem

$$(a+1)^p - (a+1) \equiv a^p - a \pmod{p}.$$

Această demonstraţie a fost dată de EULER (Com. nov. Acad. Petrop. t. VIII, p. 74), iar o primă extindere a teoremii este constituită de congruenţele

$$(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$$

$$(a+b+c+\ldots)^p \equiv a^p + b^p + c^p + \ldots \pmod{p}$$

cu p număr prim.

2. *Exemplu.* Să arătăm că

$$a^{37\cdot 73-1} \equiv 1. \qquad \text{(mod. } 37.73\text{)}$$

Avem

$$2^{36} \equiv 1 \qquad \text{(mod. } 37\text{)}$$

$$2^{9} \equiv 1 \qquad \text{(mod. } 73\text{)}$$

deci

$$2^{36} \equiv 1 \qquad \text{(mod. } 73\text{)}$$

şi cum numerele 37 şi 73 sunt coprime, rezultă

$$2^{36} \equiv 1 \qquad \text{(mod. } 37.73\text{)}$$

care ridicată la puterea 75, dă

$$2^{37\cdot 73-1} \equiv 1 \qquad \text{(mod. } 37.73\text{)}$$

deoarece

$$37.73 = 36.75 + 1.$$

Din acest exemplu rezultă că teorema lui FERMAT se poate aplica şi la numere compuse, astfel că ea n'are reciprocă în general ci numai în anumite condiţiuni.

3. Se poate ca uneori $a^{p-1} - 1$ să fie divizibil prin p? De exemplu

$$3^{10} - 1 = \text{Mult. } 11^2 \qquad 10^3 - 1 = \text{Mult. } 3^3.$$

S'a verificat că pentru $a = 10$ şi $p < 1000$ nu mai există decât congruenţa

$$a^{p-1} \equiv 1 \text{ (mod. } p = 487 = 2.3^5 + 1).$$

Câtul lui $2^{p-1} - 1$ prin p nu este patrat perfect decât pentru $p = 2, 3, 7$. Luând $p = 2q + 1$, avem

$$(2^q - 1)(2^q + 1) = px^2$$

şi cum factorii primului membru sunt coprimi, unul e un patrat impar, iar celălalt produsul lui p printr'un patrat impar. Deci

$$2^q = y^2 \pm 1.$$

Luând semnul +, ecuaţia e posibilă numai pentru $q = 1$, deoarece membrul secund este congruent cu 2 mod. 8. Luând semnul —, avem

$$2^q = (y + 1)(y - 1)$$

şi deci

$$y \pm 1 = 2.$$

4. O problemă importantă relativă la teorema lui FERMAT este determinarea câtului h din relaţiunea

$$a^{p-1} - 1 = hp$$

PLANA a dat următoarea expresie pentru acest cât

$$h = \frac{1}{pa}[S_1 + C_{p-1}^2 S_2 + C_{p-1}^3 S_3 + \ldots]$$

unde

$$S_m = 1 + 2^m + \ldots + p^m,$$

iar C_m^n e simbolul combinărilor (Mém. de l'Ac. des sc. de Turin 1859).

5. **Teorema lui** EULER. *Dacă* a *şi* n *sunt coprimi, avem*

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \qquad (\text{mod. } n)$$

$\varphi(n)$ *fiind indicatorul lui* n.

Intr'adevăr, pentru p prim şi coprim lui a, avem

$$a^{p-1} = 1 + hp$$

din care prin ridicări succesive la puterea p, deducem

$$a^{(p-1)p} = 1 + h_1 p^2, \quad a^{(p-1)p^2} = 1 + h_2 p^3, \quad a^{(p-1)p^3} = 1 + h_3 p^4 \ldots$$

astfel încât vom avea

$$a^{p^{\alpha+1}-p} \equiv a^{I(p^\alpha)} \equiv 1 \qquad (\text{mod. } p^\alpha)$$

şi cum

$$\varphi(n) = \varphi(p^\alpha . q^\beta . r^\gamma \ldots) = \varphi(p^\alpha)\varphi(q^\beta)\varphi(r^\gamma)\ldots$$

relaţia lui EULER devine evidentă.

6. Dacă admitem că unul din factorii $p, q, r, \ldots$ este 2 şi că puterea sa este mai mare ca 2, observând că avem

$$a^{2^{\alpha-2}} \equiv 1 \qquad (\text{mod. } 2^\alpha)$$

putem înlocui indicatorul acestui factor prin jumătatea sa, astfel că dacă notăm cu $\varphi'(n)$ comultiplul minim al întregilor $\varphi(p)$, $\varphi(q)$, $\varphi(r)\ldots$ congruenţa

$$a^{\varphi'(n)} \equiv 1$$

este adevărată pentru modulele $p, q, r\ldots$ deci şi pentru modulul n, deoarece aceste module sunt coprime două câte două.

Funcţiunea numerică $\varphi'(n)$ se numeşte *indicatorul redus al lui* n.

7. **Teorema lui** WILSON. Pentru un modul prim p, întregii inferiori lui, pot fi asociaţi doi câte doi astfel ca produsul lor să fie congruent cu 1 pentru modulul p, iar cum în afara întregilor 1 şi $p-1$, nici un alt întreg inferior lui p nu poate fi egal asociatului său, rezultă că întregii 2, 3, 4, ..., $(p-2)$ se asociază doi câte doi, iar produsul lor va fi congruent cu $+1$ faţă de modulul p. Vom avea deci congruenţa

$$(p-2)! \equiv 1 \qquad (\text{mod. } p)$$

care multiplicată prin $p-1$ ne dă relaţia atribuită lui WILSON de către WARING şi enunţată în Meditationes algebricae

$$(p-1)! + 1 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

valabilă pentru p număr prim şi care constitue condiţia necesară şi suficientă ca un număr să fie prim, fără însă a fi şi de o utilitate practică.

Demonstraţia a fost dată de GAUSS în Disq. Arithm., p. 77.

8. Dacă p nu este prim, dar > 4, atunci

$$(p-2)! \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

căci: dacă p nu este patrat perfect, se descompune în doi factori inegali conţinuţi în $(p-2)!$: dacă p este patrat perfect, egal cu n, atunci $(p-2)!$ conţine factorii lui n^2 şi $2n^2$; iar dacă $p = 4$, congruenţa este evidentă.

9. Dacă $p = 4q+3$, avem

$$[(2q+1)!]^2 - 1 = 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

şi deci *pentru ca* $p = 4q+3$ *să fie prim, este necesar şi suficient ca restul împărţirii întregilor* $(2q+1)!$ *şi* p *să fie* ± 1.

10. Dacă $p = 4q+1$, avem

$$[(2q)!]^2 + 1 = 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

astfel că este necesar şi suficient ca -1 să fie restul împărţirii întregilor $[(2q)!]^2$ şi p, pentru ca întregul $p = 4q+1$ să fie prim.

11. Fie n un modul oarecare coprim unui întreg a, să studiem resturile termenilor progresiei geometrice

$$a, a^2, a^3, \ldots$$

faţă de modulul n.

Observăm dela început că nu există restul zero căci a şi n fiind coprime, resturile vor fi coprime lui n, iar cum numărul resturilor nu poate depăşi $I'(n)$ rezultă că există doi termeni a^s şi şi a^{s+t} cu acelaşi rest. Vom avea deci

$$a^s a^t \equiv a^s \pmod{n}$$

şi cum a^s e coprim modulului, rezultă

$$a^t \equiv 1 \pmod{n}$$

ceea ce reese şi din teorema lui EULER.

Printre toate puterile întregului a cari au restul 1 faţă de modulul n, cea mai importantă este cea mai mică anume $g \neq 0$ gausianul lui a faţă de modulul n. Admiţând că

$$a^g \equiv 1 \pmod{n}$$

ansamblul tuturor resturilor termenilor progresiei, care se numeşte perioada lui a faţă de modulul n, este dat de termenii şirului

$$1, a, a^2, \ldots, a^{g-1}$$

şi ale căror resturi sunt toate diferite, căci dacă am avea

$$a^{s+t} \equiv a^s \pmod{n}$$

ar rezulta

$$a^t \equiv 1, \pmod{n}$$

iar g n'ar mai fi restul minim corespunzător restului 1.

Celelalte resturi reproduc aceeaşi perioadă, căci

$$a^g \equiv 1,\ a^{g+1} \equiv a,\ a^{g+2} \equiv a^2 \ldots \pmod{n}$$

şi în general, dacă r şi q sunt restul şi câtul împărţirii lui s prin g, avem

$$s = qg + r \quad \text{şi} \quad a^s \equiv a^{2g} a^r \equiv a^r \pmod{n}$$

astfel că a^s şi a^t sunt sau nu congruente modulului n, dacă s şi t sunt sau nu congruente faţă de modulul g, gausian al lui n.

In particular, dacă $a^s = 1$, restul lui s prin g este O şi deci exponenţii lui a cari dau restul 1, sunt multipli de g. Cum însă

$$a^{I'(n)} = 1 \pmod{n}$$

rezultă că gausianul lui a pentru modulul n, este un divizor al indicatorului redus al lui n, iar exponenţii lui a cari divizaţi prin n, dau restul 1, sunt multipli ai gausianului.

12. **Teorema lui** LUCAS. *Dacă* $a^x - 1$ *este divizibil prin* n, *sau coprim lui, după cum* x *este egal cu* $n - 1$ *sau cu o parte alicotă a lui* n, *atunci întregul* n *este cu necesitate prim.*

Diferența $n - I(n)$ este pozitivă, și nu poate fi egală cu 1 decât dacă n este prim, iar cum indicatorul redus este totdeauna inferior indicatorului, rezultă că dacă gausianul lui a față de modulul n este $n - 1$, atunci n este cu necesitate prim, căci dacă avem congruența

$$a^{n-1} \equiv 1 \qquad (\text{mod. } n)$$

exponenții puterilor lui a congruenți cu 1, n'ar putea fi decât multipli ai unui anumit divizor al lui $n - 1$.

13. Spre exemplu luând $a = 3$ și $n = 65537 = 2^{16} + 1$, divizorii lui $n - 1$ sunt

$$1, 2, 2^2, 2^3, \ldots 2^{16}.$$

Dacă vom calcula resturile lui 3 ridicat la puterile termenilor acestui șir, și observând că fiecare rest se obține divizând prin n patratul restului precedent, vom găsi

$$3, 9, 81, 6561, -11088, \ldots, +1$$

și cum nu există nici un rest egal cu $+1$ înaintea ultimului, concludem că

$$2^{16} + 1 = 65537$$

este un număr prim.

14. Ca încheere să menționăm și congruența lui LAGRANGE

$$x^{p-1} - 1 \equiv (x+1)(x+2)\ldots(x+p-1) \quad (\text{mod. } p)$$

unde p este prim și care conține teoremele lui FERMAT și WILSON.

G. G. CONSTANTINESCU.

EXERCIȚII REZOLVATE

Clasa V-a. *Exerc. 554. Să se rezolve sistemul:*

$$\frac{x^m + my^m}{a} = \frac{y^m + mz^m}{b} = \frac{z^m + mx^m}{c} \; ; \quad x^m + y^m + z^m = d,$$

x, y, z fiind numere reale.

V. GH.

Punem $x^m = u$, $y^m = v$, $z^m = w$ şi aplicăm şirului de rapoarte egale proprietatea cunoscută.

Vom avea:

$$\frac{u + mv}{a} = \frac{v + mw}{b} = \frac{w + mu}{c} = \frac{d(m+1)}{a+b+c} = A.$$

Deducem:

$$\begin{cases} u + mv = aA \\ v + mw = bA \\ w + mu = cA. \end{cases}$$

Intre primele două ecuaţii eliminăm pe v; vom avea:

$$\begin{cases} u - m^2v = aA - bmA \\ mu + w = cA. \end{cases}$$

Aplicând metoda reducerii găsim:

$$u = \frac{A(a - bm + cm^2)}{1 + m^3} = \frac{d(m+1)(a - bm + cm^2)}{(a+b+c)(1+m^3)} =$$

$$= \frac{d(a - bm + cm^2)}{(a+b+c)(1 - m + m^2)}.$$

Deci:

$$x = \sqrt[m]{\frac{d(a - bm + cm^2)}{(a+b+c)(1 - m + m^2)}}.$$

Valorile lui y şi z le găsim făcând permutări circulare între literele a, b, c.

Clasa VI-a. *Exerc. 554. Să se găsească unghiurile unui triunghiu dreptunghiu între laturile căruia avem relaţia:*

$$a = 2b - 3c.$$

V. Gh.

In orice triunghiu dreptunghiu avem:

$$b = a \sin B$$
$$c = a \cos B.$$

Inlocuind aceste valori ale lui b şi c în relaţia dată şi apoi simplificând cu a se obţine:

$$2 \sin B - 3 \cos B = 1,$$

sau

$$\sin B - 1{,}5 \cos B = 0{,}5.$$

Punând $1{,}5 = \operatorname{tg}\varphi$, ecuația precedentă devine:

$$\sin(B - \varphi) = 0{,}5\cos\varphi.$$

Calculăm pe φ cu ajutorul logaritmilor și găsim:

$$\varphi = 56^0\,18'\,36''.$$

Tot prin logaritmi aflăm:

$$B - \varphi = 16^0\,6'\,8''.$$

Deci:

$$B = 72^0\,24'\,44''$$

$$C = 90^0 - B = 17^0\,35'\,16''.$$

VI. 571. In extremitatea A *a segmentului de dreaptă* OA *se ridică o perpendiculară pe care se iau cinci puncte* A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, *astfel ca unghiurile* A_1OA, $A_2OA_1, \ldots, A_5OA_4$ *să fie toate egale între ele și egale cu* 15^0. *Să se demonstreze:*

1°. Că două din triunghiurile A_iOA_j *sunt isoscele.*

2°. Că una din lungimile AA_i *este apotema și latura dodecagonului stelat înscris în cercul cu centrul în* O *și cu raza* OA_5.

GH. B.

1°. In triunghiurile dreptunghice OA_iA unghiurile din O și A sunt date prin construcție, iar unghiul din A_i se deduce imediat din relațiunea:

$$\widehat{OA_iA} = 90^0 - \widehat{A_iOA}.$$

Se găsește

$$\widehat{OA_3A} = 45^0 \;;\; \widehat{OA_4A_2} = 30^0 \;;\; \widehat{OA_5A_4} = 15^0$$

care împreună cu valoarea unghiurilor din O arată că triunghiurile OA_2A_4 și OA_4A_5 sunt isoscele având

$$OA_2 = A_2A_4 \quad \text{și} \quad OA_4 = A_4A_5.$$

2°. Din triunghiul dreptunghic OAA_i se scoate:

$$AA_i = OA_i \sin\widehat{AOA_i} = OA_i \cos\widehat{AA_iO}.$$

Inlocuind unghiurile prin valorile lor găsim

$$AA_1 = OA_1 \sin 15^0 = OA_1 \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

care este tocmai apotema duodecagonului stelat înscris în cercul cu raza OA_1.

$AA_2 = OA_2 \sin 30^0 = \frac{OA_2}{2}$ = apotema triunghiului echilateral înscris în cercul de rază OA_2.

$AA_3 = OA_3 \sin 45^0 = OA_3 \frac{\sqrt{2}}{2}$ = apotema patratului înscris în cercul de rază OA_3.

$AA_4 = OA_3 \sin 60^0 = OA_3 \frac{\sqrt{3}}{2}$ = apotema exagonului înscris în cercul de rază OA_3.

$AA_5 = OA_5 \cos 15^0 = OA_5 \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ = latura duodecagonului stelat înscris în cercul de rază OA_5.

VI. 579. Să se rezolve prin geometrie elementară exercițiul 340, căruia i s'a dat o soluție prin geometria analitică la pag. 159, Vol. VI din Gazeta Matematică, Suplimentul cu Exerciții.

GH. B.

Enunțul exercițiului 340, citat, este:

Prin vârfurile B *și* C *ale triunghiului* ABC *se duc dreptele paralele* Δ_b *și* Δ_c. *O dreaptă trecând prin* A *le întâlnește în* B′ *și* C′. *Paralelele duse prin* B′ *la* AC *și prin* C′ *la* AB *se întâlnesc într'un punct al laturii* BC.

Fie P, M și M′ intersecțiile lui BC cu AB′C′, cu paralela din B′ la AC și cu paralela din C′ la AB.

Din triunghiurile, care se formează pe o figură, în condițiile enunțului și care sunt tăiate de o paralelă la bază, se scoate:

$$\frac{MP}{B'P} = \frac{CP}{AP}, \quad \frac{C'P}{M'P} = \frac{AP}{BP}$$

de unde prin înmulțire, simplificare și gruparea convenabilă a termenilor, se scoate

$$(1) \qquad \frac{MP}{M'P} = \frac{CP}{BP} \cdot \frac{B'P}{C'P}.$$

Dar triunghiul PBB' tăiat de CC', paralel la BB', dă

$$\frac{CP}{BP} \cdot \frac{B'P}{C'P} = 1$$

care dus în (1) arată că

$$MP = M'P$$

deci M se confundă cu M'.

Clasa VIII-a, *Exerc. 361. Să se rezolve ecuația*

$$\frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \ldots + \frac{A_{m+1}}{x - a_{m+1}} = 0$$

știind că admite o rădăcină de ordinul m *de multiplicitate.*

V. Gh.

Vom rezolvi ecuația :

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \frac{D}{x-d} = 0$$

care să admită o rădăcină triplă.

Avem :

$$f(x) = A(x-b)(x-c)(x-d) + \ldots = 0$$

$$f'(x) = A[(x-c)(x-d) + (x-b)(x-d) + (x-b)(x-c)] + \ldots = 0$$

$$f''(x) = A[(x-d) + (x-c) + (x-d) + (x-b) + (x-c) + (x-b)] + \ldots = 0.$$

Rădăcina căutată satisface ecuația $f''(x) = 0$. Această rădăcină este :

$$x = \frac{2![A(b+c+d) + B(a+c+d) + C(a+b+d) + D(a+b+c)]}{3!\,\Sigma A}.$$

Generalizând acest rezultat deducem că ecuația propusă din enunț admite rădăcina

$$x = \frac{(m-1)![A_1(a_2 + a_3 + \ldots + a_{m+1}) + A_2(a_1 + a_3 + \ldots + a_{m+1}) + \ldots + A_{m+1}(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)]}{m!\,\Sigma A_1}$$

de ordinul m de multiplicitate, care firește e diferită de $a_1, a_2, \ldots, a_{m+1}$.

Până la 10 Noemvrie s'au primit soluțiuni bune pentru exercițiile publicate în numerele 9 anul VI, și 1, 2 anul VII, dela[1]):

Liceul de fete „Carmen-Sylva" București.

Clasa VII-a: Vasilescu O. Alexandra (VII: 520).

Liceul de fete „Iulia Hajdău" București.

Clasa VII-a: Iorga Aneta (VII: 519), Stoia N. Silvia (VII: 519)

Internatul Ortodox București.

Clasa IV-a: Mateescu P. Mihaela (IV: 512, 3).

Colegiul Național „Sf. Sava" București.

Clasa IV-a: Bâlcu Nicolae (IV: 498).
Clasa V-a: Dumitrescu F. Dan (V: 617, 8), Mișicu V. M. (V: 618 22, 6, 8, VI: 608).
Clasa VI-a: Ștefănescu C. (VI: 598).
Clasa VII-a: Andonie St. (VII: 519).

Gimnaziul „Cultura" București.

Clasa IV-a: Gutman Marcian (IV: 498).

Institutul „Schewitz Thierrin" București.

Clasa VII-a: Florescu N. M. (VII: 520).
Clasa VIII-a: Mărgărit I. N. (VIII: 409, 10, 23*).

Liceul „Aurel Vlaicu" București.

Clasa VIII-a: Davidescu M. Al. (VIII: 417*).

Liceul Comercial „Marele Voevod Mihai" București.

Clasa VI-a: Mateescu G. Emin (VI: 601).

Liceul „Gh. Lazăr" București.

Clasa IV-a: Rădulescu C. Mihai (IV: 510, 2).
Clasa V-a: Brânceni Iliescu Bogdan (V: 618).
Clasa VII-a: Brânceni Iliescu C. (E. G. 303*).

Liceul „Matei Basarab" București.

Clasa IV-a: Ieșan St. A. (IV: 521).

---

1) Semnul * însoțește numărul unui exercițiu rezolvat foarte bine.

Liceul „Mihai Viteazu“ Bucureşti.

Clasa V-a: VERNESCU V. MIHAIL (V: 612, 6*).

Liceul „Titu Maiorescu“ Bucureşti.

Clasa VII-a: LAHOVARY N. AL. (VII: 538), SENI C. (VII: 519, 20).

Liceul „Dr. Ion Meşotă“ Braşov.

Clasa V-a: DUMITRAŞCU OCT. (V: 626).
Clasa VI-a: GEORGESCU N. MIHAI (VI: 598, 601).

Liceul „Mircea cel Bătrân“ Constanţa.

Clasa VII-a: SOTIRIU H. TEODOR (VII: 519, 20).

Liceul „Unirea“ Focşani.

Clasa VIII-a: DOAGĂ T. ŞT. (E. G. 304, 6).

Liceul Internat „C. Negruzzi“ Iaşi.

Clasa VII-a: MANOLACHE TR. MIRCEA (VII: 519).

Liceul „Sf. Petru şi Pavel“ Ploeşti.

Clasa IV-a: IUPCEANU N. NICULAE (IV: 489, V: 622).

Liceul „Traian“ Turnu-Severin.

Clasa VI-a: LAZĂR LONECI (VI: 581).
Clasa VII-a: CORÂCI I. C. (E. G. 306).
Clasa VIII-a: BENGULESCU A. C. (VIII: 424, E. G. 306*).

EXERCIŢII PROPUSE

Soluţiile exerciţiilor propuse în acest număr se primesc până la 1 Martie 1941

Clasa III-a. *Exerc. 148.* Un proprietar având, în urma cutremurului de Pământ, a face reparaţii la casa sa, angajează lucrători cu ziua şi plăteşte pentru 7 bărbaţi şi 6 femei în prima zi lei 2120; în a doua zi pentru 5 bărbaţi şi 8 femei lei 1960. Cât a plătit ziua de lucru pentru un bărbat şi cât pentru o femee?

O. N. Ţ.

III. 149. Un elev punând pe un cântar 8 bile de plumb de o mărime şi 7 bile de plumb de a doua mărime găseşte 2640 gr; punând din nou 8 bile de plumb de a doua mărime şi 7 bile de plumb de a doua mărime găseşte 2535 gr.

Ce greutate are o bilă de plumb de prima mărime?

O. N. Ţ.

III. 150. Intr'un cerc (O) construim două coarde AB şi CD perpendiculare una pe alta. Păstrând apoi cercul (O) fix şi unghiul COA deasemenea fix, învârtim unghiul BOD în jurul punctului O până când latura OD se aşterne pe OA.

Să se găsească lungimea coardei CB', unde B' este noua poziţie a punctului B, dacă raza cercului (O) este R.

O. N. Ţ.

III. 151. Mă înţeleg cu proprietarul unui loc să i-l cumpăr cu 165.000 lei, sumă în care intră şi preţul recoltei ce se află pe loc. Peste două zile când vin să plătesc arvuna, proprietarul ridică preţul recoltei cu $2^0/_0$ din costul locului şi-mi cere 168.000 lei. Să se afle cu cât plătesc recolta. Dacă s'ar menţine în fiecare an acest preţ pentru recoltă, în cât timp aş acoperi costul locului?

C. I. B.

III. 152. Unghiurile A, B, C, D ale unui trapez sunt proporţionale cu numerele 4, 5, 7, 8 să se afle unghiurile trapezului.

C. I. B.

Clasa IV a. *Exerc. 530.* Să se simplifice expresia

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}.$$

G. G. C.

IV. 531. A şi B fiind fixe pe o dreaptă Δ din spaţiu, iar C mobil pe o altă dreaptă Δ' nesituată în acelaşi plan cu Δ, să se arate că medianele vârfurilor A şi B în triunghiul ABC rămân conţinute în câte un plan.

G. G. C.

IV. 532. Fie A şi B două puncte fixe şi o dreaptă Δ date în spaţiu. Care este locul centrului de greutate al unui triunghiu ABC, al cărui vârf C descrie dreapta Δ. Discuţie completă.

O. N. Ţ.

IV. 533. Fie A şi B două puncte fixe şi un plan P date în spaţiu. Care este locul centrului de greutate al triunghiului ABC, al cărui vârf C ocupă toate poziţiile în planul P. Discuţie.

O. N. Ţ.

IV. 534. Fie o dreaptă Δ, un punct A fixe în spaţiu. Care este locul *proiecţiei ortogonale* a punctului A pe un plan P, trecând prin dreapta Δ şi mobil în jurul ei. Discuţie.

O. N. Ţ.

IV. 535. Sunt date în spaţiu două drepte fixe D_1 şi D_2. Un plan P taie respectiv pe D_1 şi D_2 în punctele A_1 şi A_2; iar planele R_1 şi R_2 perpendiculare respectiv pe D_1 şi D_2 în punctele A_1 şi A_2 se taie după o dreaptă Δ. Să se arate că, dacă planul P se mută paralel cu el însuşi, dreapta Δ se mută deasemenea paralel cu ea însăşi. Discuţie.

O. N. Ţ.

IV. 536. Două plane P_1, P_2 se taie după o dreaptă D. O dreaptă Δ înţeapă planele P_1 şi P_2 respectiv în A_1 şi A_2. Să se arate că, dacă dreapta Δ are direcţia perpendiculară pe D, perpendicularele în A_1 şi A_2 respectiv pe planele P_1 şi P_2 sunt în acelaşi plan.

O. N. Ţ.

IV. 537. Să se arate că produsul:

$$P \equiv 1.2.3.4.5\left(1+\frac{a}{x}\right)\left(1+\frac{2a}{x}\right)\left(1+\frac{3a}{x}\right)\left(1+\frac{4a}{x}\right)\left(1+\frac{5a}{x}\right)$$
$$\left(1+\frac{x}{a}\right)\left(1+\frac{x}{2a}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{5a}\right)$$

este patrat perfect.

O. N. Ţ.

IV. 538. Să se simplifice fracția algebrică:

$$\frac{[(x^2+3a^2)^2-(3x^2+a^2)^2].[(3x^2+5a^2)^2-(5x^2+3a^2)^2][(5x^2+7a^2)^2-(7x^2+5a)^2]}{[x^3+ax^2+a^2x+a^3]^3}$$

Generalizare.

O. N. Ț.

IV. 539. Să se simplifice expresia:

$$E \equiv \frac{\left(\frac{a^2+2b}{b^2+2a}\right)-\frac{b}{a}}{\left(\frac{a^5+2b}{b^5+2a}\right)-\frac{b}{a}} : \frac{\left(\frac{a^2+2b}{b^2+2a}\right)-\frac{b^3}{a^3}}{\left(\frac{a^5+2b}{b^5+2b}\right)-\frac{b^3}{a^3}}.$$

O. N. Ț.

Clasa V-a. *Exerc. 631.* Să se simplifice fracția

$$\frac{\sum \frac{1}{a(a-b)}}{\sum \frac{1}{a(c-a)}} \equiv \frac{\frac{1}{a(a-b)}+\frac{1}{b(b-c)}+\frac{1}{c(c-a)}}{\frac{1}{a(c-a)}+\frac{1}{b(a-b)}+\frac{1}{c(b-c)}}.$$

știind că: $a+b+c=0$.

O. G. R.

V. 632. Fie I și I_a centrele cercurilor înscris și exînscris triunghiului ABC la latura AB. Să se arate, că proiecția segmentului II_a pe laturile unghiului A este egală cu BC.

O. G. R.

V. 633. Să se construiască un triunghiu ABC fiind date mijloacele a două laturi și piciorul înălțimii pe a treia latură. Discuție.

H. P. I.

V. 634. Perpendiculara, într'un punct al medianei AM a triunghiului ABC dreptunghic în A, întâlnește catetele AB și AC în D și E. Să se demonstreze că patrulaterul BDEC este totdeauna inscriptibil.

Gh. B.

V. 635. Se dă triunghiul ABC, dreptunghic în A, şi fie A' proiecţia lui A pe BC, iar A'' proiecţia lui A' pe AC. Să se demonstreze că, dacă AB şi A'C sunt egale, atunci AC, bisectoarea unghiului BA'A'' şi perpendiculara în B pe BC se întâlnesc într'un punct.

GH. B.

V. 636. Ecuaţia:

$$2x^2 + (m - 1)\,x + m - 3 = 0$$

are totdeauna rădăcini reale.

Fie $x_1 = 2$ o rădăcină; să se afle a doua rădăcină.

N. M.

V. 637. Să se demonstreze că dacă A şi B sunt de acelaşi semn, ecuaţia

$$A(x - a) + B(x - b) + C(x - a)(x - b) = 0$$

are totdeauna două rădăcini reale: *una* în intervalul (a, b) şi *alta* în afara acestui interval.

G. G. C.

V. 638. Să se rezolve sistemul

$$x + y = 404 \quad ; \quad 2x^2 + 3xy = 274211.$$

N. M.

V. 639. Se dă ecuaţia: $x^2 + px + q = 0$ şi se cere:

1°. Să se formeze ecuaţia care are drept rădăcini

$$y_1 = \frac{1 + \lambda x_1}{1 + x_1} \quad ; \quad y_2 = \frac{1 + \lambda x_2}{1 + x_2}$$

x_1 şi x_2 fiind rădăcinile ecuaţiei date.

2°. Să se determine λ astfel ca ecuaţia în y să aibă rădăcini egale şi de semn contrar.

3°. Să se determine λ astfel ca el să fie media armonică a rădăcinilor ecuaţiei în y.

4°. Să se determine λ astfel ca inversul său să fie egal cu suma inverselor rădăcinilor ecuaţiei în y.

Socotind p şi q drept coordonatele unui punct din planul axelor Op, Oq, să se arate regiunile planului pentru care avem în acelaşi timp valori reale ale lui λ şi rădăcini reale ale ecuaţiei în y.

G. D. S.

V. 640. Să se demonstreze că dacă o rădăcină a ecuației $x^2+ax+b=0$ este inversa unei rădăcini a ecuației $x^2+px+q=0$, atunci avem relația:

$$(aq-p)(bp-a)=(bq-1)^2.$$

G. G. C.

V. 641. Se dă sistemul:

$$ax+by+cz+xy+yz+zx=0$$
$$x+y+z+ayz+bxz+cxy=0,$$

x, y, z fiind necunoscute. Să se afle valorile lui x și y în funcție de z care verifică sistemul.

Să se determine z, astfel ca să existe o singură valoare pentru x și o singură valoare pentru y care să verifice sistemul.

C. I. B.

V. 642. Știind că ecuațiile

$$x^2+a_1x+b_1=0 \quad \text{și} \quad x^2+a_2x+b_2=0$$

au o rădăcină egală în valoarea absolută, să se găsească relațiile care leagă coeficienții a_1, b_1, a_2, b_2.

Să se examineze reciproca proprietății.

O. N. Ț.

Clasa VI-a. *Exerc. 618.* Fie C mijlocul arcului subîntins de coarda AB a cercului (O) de centru O. Să se calculeze unghiul OAB știind că paralela din C la OA întâlnește pe AB în D și cercul (O) în E astfel că $\overline{CD}=\overline{DE}$.

G. G. C.

VI. 619. Se dă $\cos x=\frac{2047}{4225}$. Să se afle liniile trigonometrice ale jumătății arcului.

N. M.

VI. 620. Să se arate că:

$$\log_{12}5 \cdot \log_{11}7=\log_{11}5 \cdot \log_{12}7.$$

C. I. B.

VI. 621. Să se demonstreze că triunghiul semiregulat (Triunghiul are un unghiu de 60^0) este singurul triunghiu, care are unghiurile în progresie aritmetică.

GH. B.

VI. 622. Să se rezolve ecuația:

$$\cos 4x + \sin x = \cos 2x.$$

N. M.

VI. 623. Să se rezolve ecuația

$$\sin x + 8\cos x = 4.$$

N. M.

VI. 624. Să se calculeze suma

$$\sec a \sec 2a + \sec 2a \sec 3a + \ldots + \sec na \sec (n+1)a.$$

G. G. C.

VI. 625. Să se rezolve ecuația:

$$\sin 32\alpha + k\cos 4\alpha \cos 8\alpha \cos 16\alpha = 0$$

și să se calculeze apoi valorile expresiei: $E \equiv \operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{cotg} 2\alpha$ pentru rădăcinile aflate.

O. N. Ț.

VI. 626. Un plan P trecând printr'o dreaptă D fixă în spațiu întâlnește alte două drepte fixe D_1 și D_2 în punctele A_1 și A_2. Planele perpendiculare pe D_1 și D_2 respectiv în A_1 și A_2 se taie după o dreaptă Δ.

Când planul P se rotește în jurul dreptei D, dreapta Δ se mută paralel cu ea însăși.

O. N. Ț.

VI. 627. Să se găsească regiunile din planul axelor OX, OY pentru care coordonatele unui punct oarecare satisfac inecuației:

$$[(y^4 + 3x^2y^2)^2 - (x^4 + 3x^2y^2)^2]\,[(y^4 - 8x^2y^2)^2 - (x^4 - 8x^2y^2)^2] \geqq 0.$$

O. N. Ț.

Clasa VII-a. *Exerc. 539.* Să se calculeze determinantul

$$\begin{vmatrix} C_m^a & C_n^a & C_p^a \\ A_{m+1}^{a+1} & A_{n+1}^{a+1} & C_{p+1}^{a+1} \\ C_m^{a+1} & C_n^{a+1} & C_p^{a+1} \end{vmatrix},$$

unde A_l^i, C_l^i reprezintă numerele aranjărilor şi combinărilor de l obiecte luate câte i.

C. I. B.

VII. 540. Să se afle condiţia de compatibilitate a sistemului:

$$x\cos\alpha - y\sin\alpha = \sin 2\alpha$$
$$x\sin 3\alpha + y\cos 3\alpha = -\cos 4\alpha$$
$$x\sin 2\alpha + y\cos 2\alpha = C_m^k + 3\cos\alpha - C_m^{k+1} - 4\cos^3\alpha.$$

H. P. I.

VII. 541. Să se rezolve sistemul:

$$\frac{1}{1+\frac{1}{x}} + \frac{2}{1+\frac{1}{1+\sqrt{y}}} + \frac{3}{2-\frac{1}{1+z}} = 18a - 4$$

$$-\frac{2}{1+x} + \frac{3y-3}{y+\sqrt{y}-2} + \frac{z+1}{2z+1} = 18b$$

$$\frac{3x}{1+x} + \frac{1+\sqrt{y}}{2+\sqrt{y}} - \frac{2z}{2z+1} = 18.$$

H. P. I.

VII. 542. Să se demonstreze că expresia

$$\frac{[(x+1)^7 - x^7 - 1]\,[(x+1)^3 - x^3 - 1]}{[(x+1)^5 - x^5 - 1]^2}$$

păstrează o valoare constantă şi să se deducă identitatea

$$(x^2+x+1)^2 \equiv x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$

fără efectuarea calculelor.

G. G. C.

VII. 543. Să se calculeze suma

$$q^{\alpha}+q^{\alpha+1}(1+q)+q^{\alpha+2}(1+q+q^2)+\ldots+q^{\alpha+n}(1+q+q^2+\ldots+q^n)$$

şi să se afle limita ei pentru n tinzând către infinit, iar $q<1$.

G. G. C.

VII. 544. Să se calculeze

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{x^n+ax^{n-1}+a^2x^{n-2}+\ldots+a^{n-1}x+p\,.\,a^n}-\sqrt[3]{(n+p)\,a^n}}{\sqrt[3]{x^n+ax^{n-1}+a^2x^{n-2}+\ldots+a^{n-1}x+qa^n}-\sqrt[3]{(n+q)\,a^n}}.$$

Caz particular $p=q$.

G. D. S.

VII. 545. Se dau numerele:

$$N_1\equiv\overline{C_{11}C_{21}C_{31}\ldots C_{n1}};\ N_2\equiv\overline{C_{12}C_{22}C_{32}\ldots C_{n2}};\ldots;$$

$$N_n\equiv\overline{C_{1n}C_{2n}C_{3n}\ldots C_{nn}}$$

unde C_{ij} reprezintă o cifră oarecare.

Să se demonstreze că dacă numerele N_i sunt toate divizibile cu 9, atunci determinantul

$$D_n\equiv\begin{vmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31}\ldots C_{n1}\\ C_{12} & C_{22} & C_{32}\ldots C_{n2}\\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\\ C_{1n} & C_{2n} & C_{3n}\ldots C_{nn}\end{vmatrix}$$

este divizibil cu 3^4.

V. Gh.

VII. 546. Se consideră piramida exagonală regulată VABCDEF, a cărei muche bazică este de lungime constantă, l, iar înălţimea x variabilă, vârful V mişcându-se pe axul piramidei VO.

Considerăm şi conul a cărui bază este cercul circumscris poligonului ABCDEF, iar vârful V_1 pe VO astfel încât

$$\frac{\overline{VV_1}}{\overline{V_1O}}=\frac{m}{n}\ \text{(constantă)}.$$

Să se afle limita raportului dintre suprafața laterală a piramidei către aceea a conului când $x \to \infty$.

V. Gh.

VII. 547. Să se discute sistemul

$$\begin{cases} x_1 \sin\alpha + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 \sin\alpha + x_3 = \cos\alpha \\ x_1 + x_2 + x_3 \sin\alpha = \cos^2\alpha. \end{cases}$$

și să se rezolve în cazul când sistemul este comptabil.

O. N. Ț.

VII. 548. Să se discute sistemul

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = \sin\alpha \\ x_1 \sin\alpha + 2x_2 \sin 2\alpha + x_3 \sin 3\alpha = 4\cos\alpha \\ x_1 \cos\alpha + 2x_2 \cos 2\alpha + x_3 \cos 3\alpha = +1 \end{cases}$$

și să se rezolve în cazul când sistemul este compatibil.

O. N. Ț.

Clasa VIII-a. *Exerc. 428.* Să se studieze variația funcției

$$y = -48x^4 + 64x^2$$

și să i se construiască curba reprezentativă. Coordonatele punctelor caracteristice se vor calcula cu două zecimale exacte.

Gh. B.

VIII. 429. Să se rezolve ecuația

$$abx^3 + (a^2 + 2b^3)\, x^2 + 3ab^2x + a^2b = 0$$

știind că a și b sunt două cantități cunoscute.

H. P. I.

VIII. 430. Cercul $x^2+y^2-2x=a^2-1$ taie axa OX în A şi B. Paralelele duse prin aceste puncte la dreapta $(D)\equiv y-mx=0$ taie a doua oară cercul în A' şi B', iar cele duse prin A', B' la OX întâlnesc pe D în A", B". Să se afle locul mijloacelor segmentelor $\overline{AA''}$ şi $\overline{BB''}$, când m ia toate valorile posibile.

H. P. I.

VIII. 431. Fie U şi V două puncte pe un cerc; două paralele duse prin U, V retaie cercul în X, Y; fie W intersecţia UY, VX; paralela din W la UX, VY taie cercul în Z, T. Tangentele în Z, T şi dreptele UV, XY sunt concurente.

N. M.

VIII. 432. Se dau două axe dreptunghiulare XOY şi un punct A aşezat pe prima bisectoare a unghiului axelor. Fie A_1 şi A_2 proiecţiile lui A respectiv pe OX, OY, iar M şi N punctele în care o dreaptă variabilă, ce trece prin A, întâlneşte aceleaşi axe.

1°. Dreptele MA_2, NA_1 şi perpendiculara din O pe MN sunt concurente.

2°. Perpendicularele în M şi N pe MN întâlnesc respectiv pe OY şi OX în N' şi M'. Se cere locul geometric al intersecţiei dreptei M'N' cu perpendiculara din O pe MN.

Să se studieze şi cazul când punctul A este aşezat oricum în plan şi să se explice geometric rezultat.

G. D. S.

VIII. 433. Se dă un triunghiu ABC şi se notează cu H ortocentrul, iar cu A', B', C' mijloacele laturilor. Perpendiculara în H pe HA' taie laturile AB, AC respectiv în A_b, A_c. Să se calculeze lungimea segmentului $\overline{A_bA_c}$ şi să se arate că avem:

$$\overline{A_bA_c}=\left(\frac{2S}{a^2}+\operatorname{cotg}A\right).\overline{HA'},$$

S fiind aria triunghiului ABC.

(Se vor lua ca axe latura BC şi înălţimea triunghiului).

G. D. S.

VIII. 434. Să se scrie ecuațiile a două cercuri exterioare, ambele tangente axei yy' în origină și ambele tangente dreptei

$$7x + 24y - 168 = 0.$$

V. Gh.

VIII. 435. Se dau două puncte fixe în plan O, A; prin punctul O se duce o dreaptă OL făcând cu dreapta orientată OA unghiul α, iar prin A dreapta AI făcând cu aceeași dreaptă orientată OA unghiul 2α. Dreptele OL și AI se taie în punctul M.

a) Să se găsească locul punctului M, când α variază. Să se explice rezultatul.

b) Să se găsească locul centrului de greutate al triunghiului OAM, când α variază.

O. N. Ț.

VIII. 436. Se consideră față cu axele de coordonate rectangulare Ox, Oy punctele A (a, o), B (o, b). Se împarte arcul AB al cercului AOB în trei părți egale prin punctele P, Q.

Să se afle coordonatele centrelor de greutate ale triunghiurilor APB, AQB. Apoi să se afle locurile geometrice ale acestor puncte când A descrie axa Ox.

C. I. B.

VIII. 437. Se dau cercurile:

$$x^2 + y^2 - 2a_1 x - 2b_1 y + c_1 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2a_2 x - 2b_2 y + c_2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2a_3 x - 2b_3 y + c_3 = 0.$$

Să se scrie ecuația unui cerc tangent acestor trei cercuri.

C. I. B.

Exerciții Generale. *E. G. 328.* Să se arate că oricare ar fi m și n, întregi și pozitivi, expresia:

$$1941^{1939n+1} + 1939^{1941\,(2m+6)} - 2$$

se divide cu *97.*

H. P. I.

E. G. 329. Să se demonstreze că, dacă soluțiile ecuației pitagorice

$$x^2 + y^2 = z^2$$

conțin factorul 2 la puterile α, β, γ, atunci două din aceste puteri sunt egale, iar a treia este cel puțin cu două unități mai mare.

G. G. C.

E. G. 330. Să se arate că, oricare ar fi numărul întreg n, numărul

$$N \equiv 7^{n^2(n^2-1)^2+8} - 7^{(n+1)^2(n^2+5n+6)^2+12} + 1$$

este divizibil cu 37.

O. N. Ț.

E. G. 331. Să se arate că, oricare ar fi numărul întreg n, numărul

$$N \equiv 7^{3n(n^2-1)+5} \cdot 11^{49n(n^2-1)+12} + 7^{33(n+1)(n^2+2n)+1} \cdot 11^{22(n-1)(n^2-2n)+3} - 2$$

este divizibil cu 37.

O. N. Ț.

E. G. 332. Să se scrie numărul 1940 întrebuințând o singură cifră și primele trei operații aritmetice.

O. N. Ț.

E. G. 333. Să se găsească cel mai mic număr, care împărțit succesiv la 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 să dea respectiv resturile: 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8.

O. N. Ț.

E. G. 334. Să se calculeze suma divizorilor numărului 1941.

I. L.

INSTRUCȚIUNI

a) Soluțiile exercițiilor se vor scrie cu cerneală, pe sferturi de coală și numai pe o parte a foii.

Dacă va fi nevoie de mai multe foi pentru soluționarea unui exercițiu, ele se vor coase sau lipi în partea stângă. Figurile, ce vor fi necesare pentru urmărirea exercițiului se vor construi îngrijit, pe foi aparte, având formatul arătat mai sus și se vor coase sau lipi odată cu soluția.

Nu se vor trimite soluțiile mai multor exerciții pe aceeași foaie.

b) Redactarea soluțiilor se va face astfel:

Sus, se va scrie numărul exercițiului, dedesubt enunțul astfel cum e publicat în revistă, cu inițialele propunătorului, apoi soluția clar compusă, iar la sfârșit, iscălitura rezolvitorului în ordinea următoare:

Numele de botez complet, inițiala părintelui, numele de familie, însoțit de clasa și școala pe care o urmează.

c) Nu se vor lua în considerare soluțiile iscălite de 2 sau mai mulți corespondenți, nici soluțiile exercițiilor propuse la clase inferioare aceleia în care corespondentul se află. Pentru redijarea soluțiilor se pot vedea indicațiile din Nr. 1, Vol. IV.

d) Soluțiile se primesc timp de 3 luni dela propunerea exercițiului, numai dela abonații „Suplimentului cu Exerciții" al Gazetei Matematice, pe adresa Locot. C. D. Ionescu-Țiu, Casa Gazeta Matematică, Calea Griviței 158, București 2.

Drepturile de reproducere rezervate Societății «Gazeta Matematică».

Elevii claselor VI, VII și VIII, cu bogată activitate la această revistă își pot lărgi cadrul activității soluționând probleme din „Gazeta Matematică".

In Biblioteca „Gazetei Matematice" au apărut și se găsesc la adresa indicată mai sus, următoarele:

III. **N. Abramescu,** Lecțiuni elementare de Algebră superioară, pentru clasa VIII-a științifică, Ediția VI-a . . . . . Lei 120

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și G. Țițeica,** Vocabular Matematic . . . . . Lei 20

X. **G. Țițeica,** Culegere de Probleme de Geometrie . . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. Istoric, învățăminte. Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . Lei 200 / pentru abonații G. M. și S. G. M. Lei 150

XII. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I. (Goniometrie) revăzută și adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** Culegere de Probleme de Aritmetică. Partea I. Aritmetica rațională . . . . . Lei 190

XIV. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I-a. (Trigonometrie plană). Ediția II-a revăzută și adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

XV. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea I. Ediția IV-a revăzută și mărită . . . . . Lei 120

XVI. **G. Țițeica,** Culegere de Probleme de Geometrie Analitică. Partea I. Ediția II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 140

XVII. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea II-a. Ediția IV-a, revăzută și mărită . . . . . Lei 240

Biblioteca Istorică a GAZETEI MATEMATICE

1. Elementele lui **Euclid.** (Cărțile I — VI de Geometrie plană) tradusă din limba greacă de *V. Marian* . . . . . Lei 160

Suplimentul cu Exerciții. Abonamentul anual (9 numere) . Lei 50

„Gazeta Matematică" apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plătește înainte și începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele și toată corespondența se trimite pe adresa:

Societății „GAZETA MATEMATICĂ"

Casa Gazeta Matematică — Calea Griviței No. 158. — București 2.

(Telefon: 3-9803).

M. O., IMPRIMERIA NAȚIONALĂ — C. 67 093

M2545

Biblioteca „ASTRA"
— SIBIU —

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL VII. No. 4 1 IANUARIE 1941

0 - MAR. 2014

BIBLIOTECA CENTRALĂ
„ASOCIAȚIUNEA"
SIBIIU

74323

SOCIETATEA GAZETA MATEMATICĂ
CALEA GRIVIŢEI, 158. BUCUREŞTI 2. — TELEFON 3-9803

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL VII. No. 4 — 1 IANUARIE 1941

ABONAMENTUL LEI 50 PE AN (9 numere)

Soluţii şi orice corespondenţă pe adresa:

Locot. C. D. IONESCU-ŢIU

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviţei 158. — Bucureşti 2

EXERCIŢII REZOLVATE

Clasa IV-a. *Exerc. 519. Două cercuri tangente exterioare au razele respectiv de* $3+\sqrt{2}$ *şi* $2-\sqrt{3}$. *Să se afle:*

a) *La ce distanţă de centrul cercului mare este întâlnită dreapta centrelor de tangenta comună exterioară.*

b) *Mărimea segmentului situat pe această tangentă comună, cuprins între punctele de contact.*

C. I. B.

Notăm O, O′ centrele celor două cercuri (O centrul cercului mare), T, T′ punctele de contact ale tangentei cu cercurile (O), (O′) — A punctul de întâlnire al dreptelor TT′, OO′.

a) Din asemănarea triunghiurilor OTA, O′T′A rezultă

$$\frac{\overline{O'A}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{O'T'}}{\overline{OT}} \quad \therefore \quad \frac{\overline{OA}-\overline{O'A}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{OT}-\overline{O'T'}}{\overline{OT}},$$

deci

$$\frac{5+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\overline{OA}}=\frac{1+\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}, \quad \overline{OA}=\frac{17+8\sqrt{2}-3\sqrt{3}-\sqrt{6}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}.$$

b) Dacă O′B este paralela dusă la AT,

$$\overline{TT'}=\overline{O'B}=\sqrt{\overline{OO'}^2-\overline{OB}^2}=\sqrt{(5+\sqrt{2}-\sqrt{3})^2-(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}$$

$$=2\sqrt{6+2\sqrt{2}-3\sqrt{3}-\sqrt{6}}.$$

Clasa V-a. *Exerc. 607. Să se rezolve sistemul:*

$$x+xy+y=a$$
$$x^2+x^2y^2+y^2=b.$$

V. GH.

Ridicăm prima ecuație la patrat și ținem seamă de a doua obținând astfel:

$$2x^2y + 2xy + 2xy^2 = a^2 - b$$

$$2xy(x + 1 + y) = a^2 - b.$$

Tragem valoarea lui $(x+y)$ din ecuația 1-a, o înlocuim în ecuația precedentă, desfacem parantezele și ordonăm, obținând acum:

$$2(xy)^2 - 2(a+1)xy + a^2 - b = 0.$$

Această ecuație de gradul II în (xy) ne procură:

$$xy = \frac{a + 1 \pm \sqrt{1 + 2a - a^2 + 2b^2}}{2}.$$

Pentru prescurtare punem

$$(xy)_1 = \alpha$$

(1)

$$(xy)_2 = \beta$$

și va rezulta

$$x + y = a - \alpha$$

(2)

$$x + y = a - \beta.$$

Luăm fiecare ecuație din grupul (2) și-i alăturăm pe rând câte o ecuație din grupul (1). Găsim astfel patru sisteme de ecuații de gradul II, în fiecare sistem având suma și produsul necunoscutelor. Intrucât din fiecare sistem ne ies două sisteme de soluții, urmează că am obținut în total cele $4 \times 2 = 8$ sisteme de soluții.

V. 608[1]*). Să se rezolve și să se discute ecuația*

$$x^2 + \left(a - \frac{3}{2}\right)x + \left(b + \frac{5}{16} - \frac{a}{4}\right) = 0.$$

GH. B.

După efectuarea calculelor, ecuația devine

$$16x^2 + 8(2a - 3)x + (16b + 5 - 4a) = 0$$

de unde se scoate

$$x_{1,2} = \frac{-2a + 3 \pm \sqrt{4a^2 - 8a + 4 - 16b}}{4}.$$

---

1) La pag. 226 Vol. VI unde s'a propus exercițiul i s'a imprimat din eroare Numărul 568 in loc de 608.

Ecuația are rădăcini reale dacă

$$f(a, b) = a^2 - 2a + 1 - 4b > 0$$

$$\therefore \quad b < \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 .$$

V. 620. Două cercuri tangente interioare au razele

$$(a + \sqrt{b}) \text{ și } (a - \sqrt{b}).$$

Dreapta centrelor taie cercurile în A, B.

O secantă care trece prin punctul de contact T *și face un unghiu de* 30^0 *cu dreapta centrelor taie cercurile în* A', B'. *Să se calculeze lungimile diagonalelor patrulaterului* AA'B'B.

C. I. B.

$\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ sunt laturile exagoanelor regulate înscrise în cercurile AA'T, BB'T, deci

$$\overline{AA'} = a - \sqrt{b} \ , \ \overline{BB'} = a + \sqrt{b}.$$

$\overline{B'T}$, $\overline{A'T}$ sunt laturile triunghiurilor echilaterale înscrise în cercurile BB'T, AA'T deci

$$\overline{B'T} = (a + \sqrt{b})\sqrt{3} \ , \ \overline{A'T} = (a - \sqrt{b})\sqrt{3}$$

$$\therefore \quad \overline{A'B'} = 2\sqrt{3b}$$

și din triunghiurile dreptunghiuri AA'T, BB'T,

$$\overline{A'B}^2 = \overline{A'B'}^2 + \overline{B'B}^2 = a^2 + 2a\sqrt{b} + 13b$$

$$\overline{AB'}^2 = \overline{A'B'}^2 + \overline{A'A}^2 = a^2 - 2a\sqrt{b} + 13b.$$

Clasa VI-a. *Exerc. 590. Să se rezolve un trapez dreptunghiu* ABCD (A *unghiu drept*) *cunoscând baza mare* AB, *unghiul ascuțit* B *și suprafața lui* S. *Aplicație numerică:*

$$\overline{AB} = 223{,}45 \text{ m} ; \ \sphericalangle B = 56^0 14' 10'' ; \ S + 16.200 \text{ m}^2.$$

V. Gh.

Dintre cele patru unghiuri, trei sunt date, iar al patrulea este

$$\sphericalangle C = 180^0 - \sphericalangle B = 123^0 45' 50''.$$

Introducem notațiile:

$$\overline{AB} = \beta \ , \ \overline{DA} = \overline{CC'} = h \ , \ \overline{DC} = x.$$

Rezultă:

$$h = (\beta - x)\,\sin B$$

$$S = \frac{(\beta + x)\,h}{2} = \frac{(\beta^2 - x^2)\,\sin B}{2}.$$

Din ultima tragem:

$$x = \sqrt{\left(\beta + \sqrt{\frac{2S}{\sin B}}\right)\left(\beta - \sqrt{\frac{2S}{\sin B}}\right)}.$$

Mai găsim în fine:

$$\overline{BC} = \frac{h}{\sin B}.$$

Trapezul este rezolvat căci elementele lui necunoscute am reuşit să le avem în funcţie de cele cunoscute. Pentru aplicaţia numerică lucrând prin logaritmi, începem prin a calcula mai întâiu pe $\sqrt{\frac{2S}{\sin B}}$. Rezultatele numerice finale sunt:

$$\overline{DC} = 104{,}67 \text{ m}$$

$$\overline{DA} = 98{,}746 \text{ m}$$

$$\overline{BC} = 142{,}88 \text{ m}.$$

Verificare:

$$\frac{(223{,}45 + 104{,}67)\,98{,}746}{2} = 16.200{,}26876 \text{ m}^2.$$

VI. 596. Pe latura AB *a triunghiului* ABC *se ia un punct* C′ *aşa încât*

$$\overline{AC'} = \overline{AC}.$$

Cercul cu centrul în C′ *şi cu raza* $\overline{C'A}$ *taie pe* BC *în* C_1. *Să se calculeze laturile şi unghiurile triunghiului* $BC'C_1$ *în funcţie de laturile şi unghiurile triunghiului* ABC.

GH. B.

Presupun $\overline{AC} < \overline{AB}$ şi C′ între A şi B. Punctul C_1 poate fi pe prelungirea lui CB, unde-va în sensul BC sau în piciorul perpendicularei din C′ pe BC.

Presupun cazul când C_1 se află pe prelungirea lui CB. In triunghiul C_1BC' avem

$$\overline{BC'} = c - b \quad , \quad C'C_1 = b \quad , \quad \sphericalangle C_1BC' = A + C = \pi - B.$$

Problema revine la a rezolva triunghiul $BC'C_1$ când i se cunosc cele 3 elemente, care corespunde la cazul al treilea dela rezolvarea triunghiurilor. Aplicând formulele cunoscute acelui caz găsim

$$\sin C'C_1B = \frac{(c-b)\sin B}{b}, \quad \sphericalangle C_1C'B = \pi - (C'C_1B + A + B)$$

$$\overline{C_1B} = \frac{b \sin C_1C'B}{\sin B}.$$

La fel se rezolvă exercițiul și pentru celelalte cazuri de figuri.

Clasa VIII-a. *Exerc. 382. Într'un cerc de rază* R *să se înscrie un triunghiu isoscel de perimetru* $2l$. *Să se discute.*

Caz particular.

$$R = 2\text{ cm}, \quad l = 1\text{ cm}.$$

V. Gh.

Fie ABC triunghiul, $\overline{AB} = \overline{AC} = x$, $\overline{BC} = 2y$. Avem:

$$x + y = l$$

$$x^2 = 2R\sqrt{x^2 - y^2}$$

$$x^2 = 2R\sqrt{l(2x - l)}$$

$$f(x) = x^4 - 8R^2lx + 4R^2l^2 = 0.$$

Discuția o facem prin teorema lui Rolle. Derivata este

$$f'(x) = 4x^3 - 8R^2l = 0$$

cu singura rădăcină reală

$$x = \sqrt[3]{2R^2l}.$$

Șirul lui Rolle este

$f(-\infty)$	$f(0)$	$f\left(\sqrt[3]{2R^2l}\right)$	$f(+\infty)$
$+$	$+$	$4R^2l^2 - 6R^2l\sqrt[3]{2R^2l}$	$+$.

Se vede de aici că înscrierea este posibilă numai dacă avem

$$l \leqq \frac{3}{2} R\sqrt{3}$$

adică dacă perimetrul triunghiului este mai mic sau cel mult egal cu acela al triunghiului echilateral înscris în cercul considerat.

In cazul particular înscrierea este posibilă și se obțin pentru x două valori cuprinse în intervalele (0,1) și (2,3) dintre care, evident acceptabilă este numai prima.

VIII. 405. O bară rigidă şi grea AOB ($\overline{OA} = \overline{OB} = l$) *de densitate* δ, *secţiunea* s, *este îndoită formând unghiul* AOB $= \alpha$. *Această bară este atârnată de capătul* A *putându-se roti într'un plan vertical. Să se calculeze forţa* X, *verticală, care aplicată în* B, *face ca bara în poziţia de echilibru să aibă braţul* OB *orizontal. Să se calculeze şi presiunea* Y *asupra punctului fix* A. *Frecări nu sunt.*

Caz particular:

$l = 5$ dm. ; $\delta = 7{,}8$: $s = 1$ cm^2 ; $\alpha = 60^0$.

V. Gh.

Fie $P_1 = P_2 = ls\delta$ greutăţile braţelor barei, aplicate în centrele lor de greutate, G_1 şi G_2.

Proiectând pe verticala lui A, se ştie că trebue să avem:

(1) $$P_1 + P_2 + X - Y = 0.$$

Momentele forţelor în raport cu A sunt:

$$\mathfrak{M} P_1 = P_1 \cdot \frac{l}{2} \cos\alpha < 0$$

$$\mathfrak{M} P_2 = P_2 \cdot \frac{l\left(1 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}{2} < 0$$

$$\mathfrak{M} X = X \cdot 2l \sin^2\frac{\alpha}{2} > 0$$

$$\mathfrak{M} Y = 0.$$

Scriind că suma acestor momente este nulă, vom avea:

(2) $$2X\sin^2\frac{\alpha}{2} - \frac{P_1}{2}\cos\alpha - \frac{P_2}{2}\left(1 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = 0.$$

Relaţiunile (1) şi (2) ne procură:

$$X = \frac{ls\delta\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$Y = \frac{ls\delta\left(1 + \sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

In cazul particular:

$X = 0{,}195$ kg $\quad Y = 0{,}975$ kg.

VIII. 406. Să se scrie ecuațiile a două cercuri de raze date unul tangent interior, celalt tangent exterior unui cerc dat, luând ca axe doi diametri perpendiculari ai acestui din urmă cerc.

GH. B.

Fie O′ și r centrul și raza cercului tangent interior cercului O de rază R. Dacă OO′ face unghiul α cu axa Ox, atunci coordonatele lui O′ sunt

$$[(R-r)\cos\alpha,\ (R-r)\sin\alpha]$$

și deci ecuația cercului O′ este

$$(1)\qquad [x-(R-r)\cos\alpha]^2+[y-(R-r)\sin\alpha]^2=r^2.$$

La fel, ecuația cercului O″ de rază ρ, tangent exterior lui O este

$$(2)\qquad [x-(R+\rho)\cos\beta]^2+[y-(R+\rho)\sin\beta]^2=\rho$$

unde β este unghiul O″Ox.

Când se ia OO′ ca axă, ecuația (1) devine

$$[x-(R-r)]^2+y^2=r^2.$$

Până la 10 Decemvrie s'au primit soluțiuni bune pentru exercițiile publicate în numerele 1, 2, 3 anul VII, dela[1]):

Liceul de fete „Aurel Vlaicu" București.

Clasa V-a : MĂNESCU G. MARGARETA (V : 612, 6, 22, 3).

Liceul „Carmen-Sylva" București.

Clasa III-a : KOGĂLNICEANU M. OLGA (III : 142).

Clasa VI-a : EPURE C. MARILENA (VI : 598, 601), DAMIAN C. CORNELIA (VI : 601).

Clasa VII-a : DAVIDOGLU A. MIRA (VII : 519*, 20), STAMATESCU ILEANA (VII : 519*, 20*, 2).

Școala Centrală de fete București

Clasa III-a : ȚÂRU M. GABRIELA (III : 146).

Clasa V-a : PITEȘTEANU I. GABRIELA (V : 612), TEODORESCU I. V. (V : 612).

Clasa VI-a : OTTONE P. CECILIA (VI : 598, 9, 600, E. G. : 298).

---

1) Semnul * însoțește numărul unui exercițiu rezolvat foarte bine.

Liceul „Iulia Haşdeu" Bucureşti.

Clasa VII-a: Iorga A. (E. G.: 298), Marinică I. Emilia (VII: 535, 607), Stoia N. Silvia (VII: 529, 30*, VIII: 418, E. G.: 298, 9, 300).

Institutul Ortodox Internat.

Clasa IV-a: Mateescu Viorica (IV: 517, 8, 9, 21, 2, 7, 8, 9).

Liceul „Oltea Doamna" Iaşi.

Clasa VII: Teodorescu G. Olga (VII: 519, 35*).

Liceul „Matei Basarab" Bucureşti.

Clasa IV-a: Grigorescu P. R. (IV: 488), Ieşan Şt. Al. (III: 130, IV: 511, 27, V: 638).

Clasa V-a: Bercovici L. (V: 571).

Liceul „M. Eminescu" Bucureşti.

Clasa VI-a; Aron I. G. (V: 601, 3, 7, VI: 598, 9, 608, 11, 2, 3, VII: 519, 35, 8*, VIII: 421).

Liceul „Spiru Haret" Bucureşti.

Clasa VIII-a: Negrescu C. I. (VIII: 410, 2, 5*, 7, 22), Ştefanovici I. M. (VIII: 410, 2, 5*, 7, 22, 3, 4).

Liceul „Sf. Iosif" Bucureşti.

Clasa VIII-a: Vasilescu P. I. (VIII: 410*, 2, 5, 7, 22, 3, 4).

Liceul „Gh. Lazăr" Bucureşti.

Clasa IV-a; Rădulescu C. M. (V: 510).

Clasa V-a: Iliescu Brânceni N. Bogdan (V: 613, 20, 2, E. G.: 315), Timotin A. A. (V: 612, 4, 6).

Clasa VII-a: Iliescu Brânceni N. Călin (E. G.: 298, 9, 300, 16), Lăzărescu C. (VII: 535).

Liceul „Titu Maiorescu" Bucureşti.

Clasa III-a: Seni Gh. Dinu (III: 142).

Clasa V-a: Slăvescu V. M. (V: 571).

Clasa VII-a: Claudiu L. (VII: 522). Corban A. D. (VII: 534), Lahovary N. Al. (VII: 538), Lupu N. A. (VII: 539), Marinescu Şt. V. (VII: 519, 22, E. G.: 298, 306, 15).

Clasa VIII-a: Bugaiewschi E. (VIII: 412, 7, 28).

Liceul „Marele Voevod Mihai" Bucureşti.

Clasa VI-a: Bratu I. E. (VI: 598, 9, 601, 8, 16).

Liceul „Profesorii Asociaţi" Bucureşti.

Clasa VIII-a: Nestoride A. (VIII: 424).

Colegiul Naţional „Sf. Sava" Bucureşti.

Clasa V-a: Bâlcu Şt. N. (IV: 488, V: 612, 5, 6*), Dumitrescu F. D. (V: 622, 34, E. G.: 298, 300), Mişicu V. M. (V: 613, 8, 22, 8, 31, 4, 6, VI: 608), Savu I. I. (V: 612, 4, 6).

Clasa VI-a: Angelescu P. (VI: 598), Marinescu Al. V. (VI: 590), Petrescu I. St. (VI: 598), Priboi Ştefănescu F. C. (VI: 598, 604).

Clasa VII-a: Andonie S. I. (VII: 535, 6, 7), Botez V. R. (VII: 519*, 35), Ionescu G. (VII: 519, 38), Nadolu G. (VII: 519).

Institutul „Schewitz Thierrin" Bucureşti.

Clasa VII-a: Florescu N. M. (VII: 522, 7, 8, 35), Popescu C. I. (VII: 535).

Clasa VIII-a: Cornea P. P. (VIII: 417), Mărgărit I. N. (VIII: 409, 10*, 1*, 2, 8, E. G.: 315, 6).

Liceul „Gh. Şincai" Bucureşti.

Clasa V-a: Constantinescu I. E. (V: 607).

Liceul „Mihai Viteazul" Bucureşti.

Clasa V-a: Vernescu V. M. (V: 612, 4, 38*).

Clasa VIII-a: Vernescu V. P. (VIII: 412, 22, E. G.: 298).

Liceul „Aurel Vlaicu" Bucureşti.

Clasa VII-a: Barbaiani A. I. (E. G.: 289, 90), Davidescu M. D. (E. G.: 298, 9, 300), Mănescu G. I. (VII: 582, 35*, 6*, 8), Moisescu G. I. (VII: 534*), Popescu C. T. (VII: 519, 22).

Clasa VIII-a: Davidescu M. Al. (VIII: 410, 2, 7*, 20, (E. G.: 307).

Liceul „Moise Nicoară" Arad.

Clasa VIII-a: Gligor N. I. (VIII: 418, 22, 3*, 4, E. G.: 315).

Liceul „Avram Iancu" Brad.

Clasa IV-a: Cosma I. M. (IV: 488).

Clasa V-a: Mihuţiu G. A. (IV: 488, V: 612, 6).

Liceul „Dr. Ion Meşotă" Braşov.

Clasa III-a: Valter A. M. (III: 142, 3, 9).

Clasa V-a: Dumitrescu F. O. (V: 612, 22, 3, 6), Ouatu I. (V: 612, 22, 3).

Clasa VII-a: Florică D. Şt. (VI: 608*).

Clasa VII-a: Gologan H. G. (VII: 519, 22, 35*, 6*, 8).

Liceul Carol Buzău

Clasa VII-a: Angelescu V. (T. c.: 276, E. G.: 283, 4, 5).

Liceul „Ioniță Assan" Caracal.

Clasa VI-a: Musceleanu I. I. (E. G.: 283, 4, 5).

Liceul de băeți Câmpina.

Clasa VII-a: Tudose C. I. (E. G.: 298).

Liceul „Mircea cel Bătrân" Constanța.

Clasa VII-a: Sotiriu Teodor (VII: 522, 9, 30, 4, 8, VIII: 418).

Liceul Militar Craiova.

Clasa VII-a: Mateescu A. M. (VII: 534*, 8, E. G.: 298, 9, 300, 11, 3, 6, 21).

Clasa VIII-a: Rădulescu V. M. (VIII: 419, E. G.: 298, 300, 1, 15, 6).

Liceul „Ion Maiorescu" Giurgiu.

Clasa VIII-a: Văduva F. M. (E. G.: 283, 4, 5).

Liceul „Unirea" Focșani.

Clasa VIII-a: Doagă I. Ștefan (E. G.: 308, 10, 1, 3, 6).

Liceul militar Iași.

Clasa V-a: Adrian D. S. (V: 612, 21), Andreescu M. (V: 612, 23), Andrei G. A. (V: 612, 21, 2, 3, E. G.: 305), Ardeleanu G. (V: 612, 21, 2, 3), Bosinceanu C. C. (V: 612, 22, 3, E. G.: 305), Capverde I. V. (V: 612, 2, 3), Chirică Al. N. (V: 612, 22, 3), Coroi I. D. (V: 612, 21, 2), Davidescu P. G. (V: 612, 21, 3), Dragomir P. C. (V: 612, 21, 2), Ganea D. N. (V: 612, 22, 3), Gheorghiu St. N. (V: 612, 21, 2, 3), Ionescu M. (V: 612, 22), Nacu D. M. (V: 612, 21, 2, 3), Oană V. T. (V: 612, 23), Petrache C. I. (V: 612, 21, 2, 3), Petrescu Al. Al. (V: 621, 2, 3), Petrican I. M. (V: 612, 22, 3), Platon C. R. (V: 612, 22, 3), Popa D. P. (V: 612, 21, 3), Popa D. P. V: 612, 21 3), Popa N. N. (V: 612, 21, 2, 3), Stroescu Gh. P. (V: 622, 3), Puiu V. (V: 612, 22, 3).

Clasa VI-a: Tănase Gh. V (V: 612, 21, 2, 3), Theodorescu C. (V: 612), Tomescu M. (V: 612, 21, 2, 3), Turculeț T. (V: 612, 21, 2, 3), Țicăloiu D. O. (V: 612, 21, 2, 3), Văideanu C. G. (V: 612, 21, 2, 3), Vlad D. G. (V: 612, 22), Zaharia M. (V: 612, 23).

Clasa VI-a: Bogdan G. G. (E. G.: 290, 3, 4), Bucur N. G. (VI: 608), Căruntu Fl. (VI: 599, 608), Cosloschi V. M. (VI: 599), Drăghicescu P. P. (E. G.: 283, 4, 5, 90, 3, 4, 5), Frunză V. (VI: 599), Horceag I. M. (VI: 599), Lăzărescu A. I. (VI: 598, 9, 608), Marinescu M. I. (VI: 599, 608), Mateescu M. G. (VI: 598, 9, 608), Milea C. C. (VI: 598, 9, 608), Nicolau T. (VI: 608), Popescu G. Gh. (VI: 608), Puchiu T. G. (VI: 598, 9, 608).

Clasa VII-a: Bogdan G. (VII: 520), 22), Drăghicescu P. R. (VII: 520), Dumitriu C. R. (VII: 520), Eliade V. (VII: 520), Fotescu N. St. (VII: 520), Iacomi D. M. (VII: 520), Ivan C. Z. (VII: 520), Manoliu G. V. (VII: 520), Mateescu D. M. (VII: 520), Oslobeanu I. M. (VII: 520), Pârlog I. C. (VII: 520), Romanescu C. (VII: 520), Tache G. D. (VII: 520).

Clasa VIII-a: Gheorghiu P. (E. G.: 285), Jiletcovici A. (E. G.: 283, 4, 5), Noforniță D. D. (E G.: 285), Pescaru I. C. (E. G.: 284, 5), Potopeanu G. (E. G.: 285), Prigoreanu Gh. (E. G.: 285), Rohr Al. (E. G.: 283).

Liceul Internat Iași.

Clasa VI-a: Eftimie Gr. A. (VI: 603, 13), Popa, N. A. (T. c.: 276), Zamfir C. I. (T. c.: 276).

Clasa VII-a: Alexandru Gr. E. (E. G.: 298), Manolache C. M. (VII: 522, 35, E. G.: 293, 8, 9, 300).

Liceul „Brătianu" Pitești.

Clasa V-a: Popescu Gh. M. (V: 571, 2).

Liceul „Sf. Petru și Pavel" Ploești.

Clasa V-a: Jupcianu N. N. (V: 616).

Clasa VI-a: Cătuneanu Traian (VI: 598, 9), Moțoiu St. C. (VI: 601), Vasilescu I. V. B. (VI: 612, 3).

Clasa VII-a: Bercanu M. B. (E. G.: 294, T. c.: 276), Pandelescu G. I. (VII: 535, 6).

Liceul „Radu Greceanu" Slatina.

Clasa VII-a: Teveleanu G. G. (E. G.: 298).

Liceul „Traian" Turnu-Severin.

Clasa VII-a; Corâci I. C. (E. G.: 283, 4, 5, 94, 8, 300, 15, 6).

Clasa VIII-a: Bengulescu A. C. (VIII: 418, 20, E. G.: 293, 4, 8).

Liceul „Diaconovici Loga" Timișoara.

Clasa VIII-a: Bakonyi C. (VIII: 412, 15, 17, 24), Boleonțu L. (VIII: 421, E. G. 289, 9, 300, 25), Kinoly I. (VIII: 417).

Liceul militar „Mihai Viteazul", București.

Clasa VI-a: Crăciun N. N. (VII: 534, VIII: 417).

Clasa VII-a: Angelichi Ep. Radu (E. G. 315), Diaconescu V. (VII: 522), Rafiroiu I. R. (VII: 519), Zaharia D G.: (VII: 519).

Colegiul Național „N. „Filipescu"

Clasa VIII-a: Bârlea-Suhățeanu G. V. (VIII: 410*, 12*, 20, 2, 3*, E. G.: 298, 315).

Elevi Particulari

Clasa VII-a: Cotariu D. M. (E. G.: 283, 4, 5, 8, 90, 3, 4.

Clasa VIII-a: Moscovici E. N. (E G.: 298, 9, 300).

EXERCIŢII PROPUSE

Soluţiile exerciţiilor propuse în acest număr se primesc până la 1 Aprilie 1941

Clasa III-a. *Exerc. 153.* Se dă un semicerc de diametru $\overline{AB} = 6$ cm. Să se construiască un patrat MNPQ având vârfurile M, N pe semicerc, iar P, Q pe diametrul său $\overline{AB}$ (patrat înscris într'un semicerc).

V. GH.

III. 154. Sunt date în plan două cercuri (O) şi (I) tangente în punctul A, cercul (I) trecând prin centrul O al cercului (O). Fie $\overline{MN}$ o coardă a cercului (I) paralelă cu diametrul OA; M', N' respectiv punctele unde secantele AM şi AN taie cercul (O). Să se arate, că:

1°. Tangentele în punctele M, N, M', N' determină un paralelogram PRST;

2°. Dreapta M'N' este paralelă cu MN.

Generalizare.

O. N. Ţ.

III. 155. Este dat un segment de dreaptă AB fix ca mărime şi poziţie. Din A ducem un segment AC şi luăm pe $\overline{AC}$ un punct O astfel ca $\frac{\overline{AO}}{\overline{OC}} = 2$; fie D punctul unde paralela dusă prin C taie pe BO; E punctul unde BC taie pe AD. Din nou ducem din A un segment $\overline{AC'} = \overline{AC}$ şi luăm pe el un punct O' astfel ca $\frac{\overline{AO'}}{\overline{O'C'}} = 2$. Fie D' punctul unde paralela dusă prin C' taie pe BO'; E' punctul unde BC' taie pe AD'. Să se arate, că: Oricare ar fi poziţia segmentului AC', patrulaterul EE'O'O este un trapez în care baza mare este de patru ori cât baza mică; iar laturile neparalele ale trapezului trec printr'un punct fix.

O. N. Ţ.

III. 156. Un pensionar împrumută economiile sale în două rânduri. In primul rând împrumută o parte unei persoane A cu procentul 4% pe timp de 5 ani, iar restul unei persoane B cu procentul 3% pe timp de 7 ani. în al doilea rând, pune prima parte rămasă liberă împrumut la o întreprindere sigură cu procentul 3% pe timp de patru ani, iar a doua parte când rămâne liberă într'o afacere comercială cu un procent de 7% pe timp de 2 ani. Din prima plasare a capitalului său realizează un venit de 2070 lei; din a doua un venit de 1340 lei. Care este capitalul său împrumutat?

O. N. Ţ.

III. 157. Un aliaj are greutatea 4 kg şi titlul 0,800. Cât metal nepreţios trebue scos pentruca titlul să devină 0,900?

Dacă s'ar scoate $\frac{2}{5}$ din metalul nepreţios ce se află în aliaj, cât ar fi titlul noului aliaj? C. I. B.

Clasa IV-a. *Exerc. 540.* Fiind date două plane (P) şi (Q) care se taie după dreapta AB, şi o direcţie Δ perpendiculară pe direcţia dreptei AB, se consideră toate segmentele de dreaptă MN care se sprijină pe planele (P), (Q) şi sunt paralele cu Δ. Să se găsească locul mijloacelor segmentelor MN: *a)* când lungimea segmentelor MN este constantă; *b)* când lungimea segmentelor MN este variabilă.

O. N. Ţ.

IV. 541. Fiind date două plane paralele P şi P'; două drepte D şi D' situate respectiv în aceste plane şi nu în acelaşi plan şi un segment MM' cuprins între cele două plane, *să se construiască* un segment egal şi paralel cu $\overline{MM'}$ sprijinindu-se pe dreptele D şi D'. Discuţie.

O. N. T.

IV. 542. Fiind dat un cub de caşcaval cu latura de 2 dm, se înseamnă mijloacele tuturor muchiilor; apoi se taie fiecare vârf cu planul determinat de mijloacele muchiilor adiacente. Se obţine astfel un corp cu feţele poligoane regulate. Să se calculeze:

a) Suprafaţa corpului obţinut;

b) Volumul lui.

(Calculele se vor face cu valorile exacte). O. N. Ţ.

IV. 543. Să se construiască un tetraedru (o piramidă triunghiulară) știind că *trei din fețele* (unghiuri) celor patru unghiuri triedre ale lui sunt *unghiuri drepte*, iar una din fețele laterale ale lui este *triunghiu echilateral.* Discuție complectă.

Să se calculeze apoi volumul tetraedrului, știind că latura triunghiului echilateral este egală cu 2 dm.

O. N. Ț.

IV. 544. Să se simplifice fracția:

$$\frac{a(a+b)^2(a^3+ab^2+2b^3)+b(a-b)^2(b^3+a^2b-2a^3)}{a^4+6a^2b^2+b^4}.$$

O. N. Ț.

IV. 545. Să se arate că dacă pentru $a>b$ și $c>d$ avem relația: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{c}{d}+\frac{d}{c}$, atunci avem și: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

O. N. Ț.

IV. 536. Să se calculeze suma:

$$S=\frac{\begin{array}{c}a^4(a+b)^8+9a^6b^2(a+b)^4-6a^5b(a+b)^5-\\-a^2b^2(a-b)^6(a+b)^2-9a^4b^4(a^2-b^2)^2-6a^3b^3(a-b)^4(a+b^2)\end{array}}{(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)(a^3-a^2b+ab^2-b^3)}+$$

$$+\frac{\begin{array}{c}-b^4(a+b)^2(a-b)^6-a^2b^6(a^2-b^2)^2-2ab^5(a+b)^2(a-b)^4+\\+a^2b^2(a-b)^4(a^2+ab+b^2)^2\end{array}}{(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)}+$$

$$+\frac{\begin{array}{c}a^2b^2(a+b)^8+9a^4b^4(a+b)^4-6a^3b^3(a+b)^6-\\-b^4(a^2-b^2)^2(a^2+ab+b^2)^2\end{array}}{(a^2+2ab+b^2)(a^4-b^4)}+$$

$$+\frac{\begin{array}{c}-a^2b^2(a-b)^2(a+b)^6-9a^4b^4(a^2-b^2)^2+6a^3b^3(a-b)^2(a+b)^4+\\+a^4(a-b)^8+9a^6b^2(a-b)^4+6a^5b(a-b)^6\end{array}}{(a^2-2ab+b^2)(a^4-b^4)}$$

și să se simplifice rezultatul.

O. N. Ț.

IV. 547. Să se arate, că oricare ar fi valorile lui a şi b, expresia:

$$E \equiv \frac{a^2 - 2ab - b^2}{a^2 - b^2} + \frac{a^2 b + b^3}{a^3 - ab^2} + \frac{b(a^2 - 2ab - b^2)}{(a+b)(a^2 - ab)} + \frac{a^2 b + b^3}{a^2 b - b^3}$$

are valoarea 2.

O. N. Ţ.

IV. 548. Să se calculeze suma:

$$S \equiv \frac{a^4 (a+b)^4 (a^2 - ab + b^2)^2 - a^2 b^2 (a^2 - b^2)^2 (a^2 + ab + b^2)^2}{(a+b)^3 (a-b)(a^2 + b^2)} +$$

$$+ \frac{-b^4 (a^2 - b^2)^2 (a^2 - ab + b^2)^2 + a^2 b^2 (a-b)^4 (a^2 + ab + b^2)^2}{(a-b)^3 (a+b)(a^2 + b^2)}$$

şi să se simplifice rezultatul. O. N. Ţ.

IV. 549. Să se arate că dacă între numerele oarecare a, b, c, d avem relaţia:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{c}{d} + \frac{d}{c},$$

expresia următoare:

$$E \equiv \left[\frac{(a+c)(a+d)}{a^2 - cd} + \frac{(c+a)(c+b)}{c^2 - ab}\right]$$

$$\frac{(c^2 d^2 - a^2 b^2)\,[(a+d)(c^2 - ab) + (b+c)(a^2 - cd)]}{(a+c)\,[(a+d)^2 (b^2 - cd)(c^2 - ab) - (b+c)^2 (a^2 - cd)(d^2 - ab)]} +$$

$$+ \left[\frac{(b+c)(b+d)}{b^2 - cd} + \frac{(d+a)(d+b)}{d^2 - ab}\right] \cdot$$

$$\frac{(c^2 d^2 - a^2 b^2)\,[(b+c)(d^2 - ab) + (a+d)(b^2 - cd)]}{(b+d)\,[(b+c)^2 (a^2 - cd)(d^2 - ab) - (a+d)^2 (b^2 - cd)(c^2 - ad)]}$$

este *nulă*.

O. N. Ţ.

Clasa V-a. *Exerc. 643.* Se dă ecuaţia:

$$2x^2 - 2(\lambda + 1)x + \lambda = 0$$

şi se cere să se determine parametrul λ şi să se rezolve, ştiind că *media armonică* a rădăcinilor este egală cu *semidiferenţa dintre media aritmetică* şi *media geometrică* a rădăcinilor.

G. D. S.

V. 644. Să se rezolve sistemul

$$xy = a(x+y) \quad , \quad x^2+y^2 = 1.$$

Aplicaţie: $a = \frac{1}{3}$. In acest caz se vor transforma radicalii dubli.

G. D. S.

V. 645. Să se rezolve ecuaţia

$$x^4+1-\left(a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)x(x^2+1)+$$
$$+\left[\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)+2\right]x^2 = 0.$$

N. M.

V. 646. Să se rezolve sistemul

$$(x+3y)^2 = (3x+y)^2 - \frac{64}{9} \quad ; \quad x = y+\frac{2}{3}.$$

N. M.

V. 647. Să se demonstreze că mijloacele diagonalelor şi centrele de greutate ale triunghiurilor determinate de două diagonale şi o latură a unui pentagon oarecare, formează două pentagoane asemenea şi invers aşezate.

G. G. C.

V. 648. Să se arate că ecuaţia

$$\sqrt{x^2+2px+q}+\sqrt{x^2+2p'x+q'} = 2x+a$$

se reduce la una de gradul al doilea, dacă: $a = p+p'$ şi la una de gradul întâi, dacă mai avem încă în plus $q+q' = p^2+p'^2$, când se cere să se rezolve ecuaţia.

G. G. C.

V. 649. Fiind dat triunghiul ABC şi lungimile m, n, p, să se construiască o dreaptă Δ în aşa fel ca distanţele vârfurilor A, B, C la dreapta Δ să fie respectiv direct proporţionale cu m, n, p. Câte soluţii are problema? Discuţie complectă.

O. N. Ţ.

V. 650. Sunt date două cercuri (A) şi (B) pe acelaşi plan, fiecare din ele trecând prin centrul celuilalt. Să se arate, că putem construi o secantă comună şi *numai una*, pe care cercurile (A) şi şi (B) determină trei segmente egale, fiecare segment având extremităţile pe ambele cercuri.

O. N. Ţ.

V. 651. Fie un triunghiu ABC, înălţimile lui AA', BB', CC'; cercurile (Γ_a), (Γ_b), (Γ_c) descrise pe aceste înălţimi ca diametre; tangentele în A, B, C respectiv la cercurile (Γ_a), (Γ_b), (Γ_c) şi triunghiul $T_aT_bT_c$ format de aceste tangente. Să se demonstreze:

a) că triunghiurile $T_a\,T_b\,T_c$ şi ABC sunt omotetice; să se determine raportul lor de omoteţie şi centrul de omoteţie.

b) că cercurile (Γ_a), (Γ_b), (Γ_c) se taie două câte două după trei coarde concurente în punctul H, ortocentrul triunghiului dat ABC.

O. N. Ţ.

V. 652. Să se arate că polinomul:

$$x^4 + 4ax^3 + 4bx + 1$$

nu se poate divide prin $x^3 + 3ax^2 + b$.

O. G. R.

V. 653. Să se aşeze în ordinea mărimii lor cantităţile x, y, 1, 2 ştiind că

$$y^2 - 3xy + 2x^2 < 0$$

$$xy - y - 2x + 2 < 0.$$

G. G. C.

V. 654. Fie M un punct pe cercul de centru O şi de rază R, iar C şi D proiecţiile sale pe doi diametri ortogonali AA' şi BB' daţi.

1°. Să se arate că există totdeauna două puncte M astfel ca să avem $\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = m$, m fiind un număr pozitiv dat.

2°. Să se discute poziţia punctului M, după valorile numărului m.

3°. Către ce poziţie limită tinde punctul M, când numărul m creşte nemărginit.

4°. Dacă M' şi M'' sunt cele două poziţii ale punctului M pentru aceeaşi valoare a numărului m, să se calculeze în funcţie de m şi R segmentul M'M'', precum şi suprafaţa triunghiului M'AM''.

5°. Pentru ce valoare a numărului m, unghiul M'AM'' este de 60°?

6°. Să se demonstreze că direcţia M'M'' trece printr'un punct fix oricare ar fi numărul m.

G. G. C.

Clasa VI-a. *Exerc. 628.* Să se afle dimensiunile unui dreptunghiu ABCD, ştiind că secanta dusă din punctul M de pe AD taie celelalte laturi în P, Q, N aşa că $\overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{QC}$ şi că $\overline{MA} = a$, $\sphericalangle AMP = \alpha$. Aplicaţie:

$$\alpha = 75^0 \quad ; \quad a = 8\left(4 + \sqrt{2} + \sqrt{6}\right).$$

H. P. I.

VI. 629. Intre elementele unui triunghiu, avem

$$(b + c)^2 \sin^2 \frac{A}{2} + (b - c)^2 \cos^2 \frac{A}{2} = a^2.$$

N. M.

VI. 630. Sunt date în plan trei cercuri (A), (B), (C) de raze respectiv R_a, R_b, R_c. Ele sunt astfel aşezate în plan în cât, dacă A, B, C înseamnă unghiurile triunghiului format de centrele lor, avem relaţiile:

$$\cos A = \frac{(R_a + R_b)^2 + (R_a + R_c)^2 - (R_b + R_c)^2}{2(R_a + R_b)(R_a + R_c)};$$

$$\cos B = \frac{(R_b + R_c)^2 + (R_b + R_a)^2 - (R_c + R_a)^2}{2(R_b + R_c)(R_b + R_a)};$$

$$\cos C = \frac{(R_c + R_a)^2 + (R_c + R_b)^2 - (R_a + R_b)^2}{2(R_c + R_a)(R_c + R_b)}.$$

Ce proprietate au aceste trei cercuri?

O. N. Ţ.

VI. 631. Să se afle suprafața unui trapez isoscel ale cărui baze sunt B şi b, iar unghiul pe care îl face o diagonală cu înălțimea este α.

Aplicație numerică :

$$B = 50 \text{ m} \quad , \quad b = 34{,}2 \text{ m} \quad , \quad \alpha = 48^0\,16'.$$

V. GH.

VI. 632. Notațiile fiind cele cunoscute în triunghiu, să se arate că avem relația :

$$\Sigma a^2 \sin C \cos B + 2S \cdot \Sigma \cos A = 2R \cdot \Sigma a \sin^2 C.$$

V. GH.

VI. 633. Să se verifice identitatea :

$$[(1+\cos\alpha)(\sin 2\alpha+\cos 2\alpha-\sin 3\alpha)-(1-\sin\alpha)(\cos 2\alpha-\sin 2\alpha+\cos 3\alpha)]^2 +$$

$$[(1+\sin\alpha)(\sin 2\alpha+\cos 2\alpha-\sin 3\alpha)+(1-\cos\alpha)(\cos 2\alpha-\sin 2\alpha+\cos 3\alpha)]^2=1.$$

O. N. Ț.

VI. 634. Să se rezolve ecuația :

$$\sin 3x - \cos 3x = 2\cos 2x + \sin x + \cos x.$$

O. N. Ț.

VI. 635. Să se rezolve ecuația :

$$\frac{k}{\cos^2 x} + \frac{l}{\sin^2 x} = m.$$

Discuție complectă.

O. N. Ț.

VI. 636. Să se rezolve ecuația :

$$\frac{m}{\operatorname{tg}^2 x} + \frac{n}{\operatorname{cotg}^2 x} = l.$$

Discuție complectă.

O. N. Ț.

VI. 637. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}+\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}}{1-\sqrt{\frac{1-(\cos x+\sin x)+\sin x\cos x}{1+(\cos x+\sin x)+\sin x\cos x}}}=\frac{\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}-\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}}{1+\sqrt{\frac{1+(\sin x+\cos x)+\sin x\cos x}{1-(\sin x+\cos x)+\sin x\cos x}}}$$

O. N. Ț.

Clasa VII-a. *Exerc. 549.* Se consideră ecuațiile

$$(E_n)\quad (n-1)\,x^2-2nx+(n+1)=0\quad (n=2,3,4,\ldots)$$

și se cere să se arate că oricare ar fi n, există o valoare a lui x care anulează toate aceste ecuații.

Dacă u_n este a doua rădăcină a ecuației (E_n), să se arate că:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 1\quad ;\quad \sum_{n=2}^{\infty}(u_{n+1}-1)(u_n-1)=6.$$

G. G. C.

VII. 550. Să se afle limita expresiei

$$E=\frac{1-\sec x}{1-x\operatorname{cosec} x}$$

pentru $x=0$.

N. M.

VII. 551. Să se găsească domeniul de existență și continuitate al funcției:

$$y=\sqrt{\frac{x^6+3x^5-13x^3+3x-1}{x^6+3x^5-5x^3+3x-1}}.$$

O. N. Ț.

VII. 552. Să se determine domeniul de existență și intervalele de continuitate ale funcției:

$$y=\sqrt{\frac{x^6-7ax^5+17a^3x^3-7a^5x-a^6}{x^6-7ax^5-25a^3x^3+7a^5x-a^6}},$$

a fiind un număr real dat.

O. N. Ț.

VII. 553. Să se determine domeniul de existenţă şi intervalele de continuitate alé funcţiei:

$$y = \sqrt{\frac{x^6 + 5a^5x - 19a^3x^3 + 5a^5x - a^6}{x^6 + 5a^5x - 11a^3x^3 + 5a^5x - a^6}},$$

a fiind un număr real dat.

O. N. Ţ.

VII. 554. Să se găsească domeniul de existenţă şi intervalele de continuitate ale funcţiei

$$y = \sqrt{\frac{x^6 - 6x^5 - 33x^4 + 300x^3 - 657x^2 + 570x - 175}{x^7 - 17x^6 + 99x^5 - 171x^4 - 417x^3 + 1905x^2 - 2275x + 875}}$$

determinându-se valorile ei pentru

$$x = -7 \quad ; \quad x = +1 \quad ; \quad x = +5 \quad ; \quad x = \pm\infty.$$

O. N. Ţ.

VII. 555. Să se găsească limita expresiei:

$$E \equiv \frac{2x^2 \cos x + x \sin x - x \sin x \cos x - \sin^2 x}{x \sin x - x \sin x \cos x + \sin^2 x - 2x^2 \cos x},$$

când arcul x tinde către *zero*.

O. N. Ţ.

VII. 556. Să se găsească limita expresiei:

$$E \equiv \sqrt[3]{\frac{2x^4 + 8x^6 - (2x^2 + 5)\, x^2 \sin^2 x - (6x^2 - 3) \sin^4 x}{-2x^4 + 4x^6 + (2x^2 + 5)\, x^2 \sin^2 x - (6x^2 + 3) \sin^4 x}},$$

când x tinde către *zero*.

O. N. Ţ.

VII. 557. Să se găsească limita expresiei:

$$E \equiv \frac{\sqrt{1 - \sin x}\,\sqrt{1 - \cos x} - \sqrt{1 + \sin x}\,.\,\sqrt{3 + \cos x}}{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}},$$

când x tinde către π.

O. N. Ţ.

VII. 558. Să se găsească limita expresiei:

$$E \equiv + \sqrt{\frac{(x-2)^6+9(x-2)^5+33(x-2)^4+62(x-2)^3+63(x-2)^2+33(x-2)+7}{2(x+1)^6-18(x+1)^5+63(x+1)^4-104(x+1)^3+72(x+1)^2-16}}$$

când x tinde să devină egal cu 1.

O. N. Ţ.

Clasa VIII-a. *Exerc. 438.* Să se rezolve ecuaţia

$$x^3+(1+2a)\,x^2+3ax+a=0$$

ştiind că una din rădăcinile ei este media armonică a celorlalte două, iar a este o constantă.

H. P. I.

VIII. 439. Să se rezolve ecuaţia:

$$36x^4-18x^3-199x^2+208x-52=0.$$

G. D. S.

VIII. 440. Să se arate că oricare ar fi numerele reale λ şi μ, ecuaţia:

$$x^{2n+1}+C_{2n+1}^1 x^{2n}+C_{2n+1}^2 x^{2n-1}+\ldots$$

$$\ldots+C_{2n+1}^{2n-1}x^2+C_{2n+1}^1(\lambda^2+1)\,x+\mu=0$$

are o singură rădăcină reală.

O. N. Ţ.

VIII. 441. Să se arate, că ecuaţia:

$$P(x)\equiv x^{2n+1}+C_{2n}^1 x^{2n}+C_{2n}^2 x^{2n-1}+\ldots+C_{2n}^{2n-1}x^2+C_{2n}^{2n}x+k=0$$

are *o singură rădăcină reală* dacă $k<0$ sau $k>\frac{(2n)^{2n}}{(2n+1)^{2n+1}}$

şi *trei rădăcini reale* dacă $0<k<\frac{(2n)^{2n}}{(2n+1)^{2n+1}}$.

O. N. Ţ.

VIII. 442. Se consideră triunghiul echilateral ABC având $A(-a, o)$, $B(a, o)$. Să se afle:

1. Coordonatele vârfului C,

2. Coordonatele punctelor M, N, P care împart segmentele AB, BC, CA în raportul k,

3. Să se arate că triunghiul MNP este echilateral.

C. I. B.

VIII. 443. Se consideră triunghiul ABC format de punctele $A(a, b)$, $B(b, c)$, $C(c, a)$.

1. Să se scrie coordonatele punctelor M, N, P care împart laturile AB, BC, CA în raportul $\frac{b+c}{a}$.

2. Să se arate că triunghiurile ABC şi MNP au acelaşi centru de greutate.

C. I. B.

VIII. 444. Se dau pe o dreaptă trei puncte A, B, C. Să se determine pe dreaptă un punct M astfel încât:

$$\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2.$$

C. I. B.

VIII. 445. Se dau punctele $A(a, a-1)$, $B(b, b+1)$. Să se exprime coordonatele unui punct curent M al dreptei AB, să se determine parametrul astfel ca punctul să aibă ordonata $\frac{1}{b-1}$, apoi să se determine pentru acest caz abscisa punctului M.

C. I. B.

Exerciţii Generale. *Exerc. 335.* Pentru ce valori întregi ale numerelor N şi n, suma

$$N(N+1)+n$$

se divide prin 9?

GH. B.

E. G. 336. Numărul 46 este scris în baza de numeraţie 11. Să i se găsească pătratul în această bază.

GH. B.

E. G. 337. La câți din abonații la telefonul din București numărul telefonului ar putea avea pe 25 ca sumă a cifrelor. Numărul telefonului unui abonat din București este un număr de 5 cifre care începe cu 1, 2, 3, 4 sau 5.

GH. B.

E. G. 338. Să se calculeze expresiunea:

$$E = \frac{\varphi[\sigma(1941)]}{\sigma[\varphi(1941)]}$$

unde $\varphi(I)$ este indicatorul lui I și $\sigma(I)$ suma numerelor prime cu I și mai mici ca el.

I. L.

E. G. 339. Să se calculeze valoarea:

$$\sigma[\varphi_2(1941)] - \varphi_2[\sigma(1941)]$$

unde $\sigma(I)$ reprezintă suma numerelor prime cu E și mai mici ca el; iar $\varphi_2(I)$ este indicatorul de ordinul 2 al lui I.

I. L.

E. G. 340. Dacă $S(I)$ reprezintă suma divizorilor lui I și $\varphi_i(I)$ indicatorul de ordinul i al lui I atunci să se calculeze x astfel încât să avem:

$$\varphi_x[S(1941)] = 1.$$

I. L.

E. G. 341. Să se determine n astfel încât să avem:

$$1941^n + n = M11.$$

I. L.

E. G. 342. Cum se poate dovedi că numărul:

191561942608236107294793378082303638130997327548169216

care cuprinde 54 cifre, este un număr perfect par?

I. L.

INSTRUCȚIUNI

a) Soluțiile exercițiilor se vor scrie cu cerneală, pe sferturi de coală și numai pe o parte a foii.

Dacă va fi nevoie de mai multe foi pentru soluționarea unui exercițiu, ele se vor coase sau lipi în partea stângă. Figurile, ce vor fi necesare pentru urmărirea exercițiului se vor construi îngrijit, pe foi aparte, având formatul arătat mai sus și se vor coase sau lipi odată cu soluția.

Nu se vor trimite soluțiile mai multor exerciții pe aceeași foaie.

b) Redactarea soluțiilor se va face astfel:

Sus, se va scrie numărul exercițiului, dedesubt enunțul astfel cum e publicat în revistă, cu inițialele propunătorului, apoi soluția clar compusă, iar la sfârșit, iscălitura rezolvitorului în ordinea următoare:

Numele de botez complet, inițiala părintelui, numele de familie, însoțit de clasa și școala pe care o urmează.

c) Nu se vor lua în considerare soluțiile iscălite de 2 sau mai mulți corespondenți, nici soluțiile exercițiilor propuse la clase inferioare aceleia în care corespondentul se află. Pentru redijarea soluțiilor se pot vedea indicațiile din Nr. 1, Vol. IV.

d) Soluțiile se primesc timp de 3 luni dela propunerea exercițiului, numai dela abonații „Suplimentului cu Exerciții" al Gazetei Matematice, pe adresa Locot. C. D. Ionescu-Țiu, Casa Gazeta Matematică, Calea Griviței 158, București 2.

Drepturile de reproducere rezervate Societății «Gazeta Matematică».

Elevii claselor VI, VII și VIII, cu bogată activitate la această revistă își pot lărgi cadrul activității soluționând probleme din „Gazeta Matematică".

In Biblioteca „Gazetei Matematice" au apărut și se găsesc la adresa indicată mai sus, următoarele:

III. **N. Abramescu,** Lecțiuni elementare de Algebră superioară, pentru clasa VIII-a științifică, Ediția VI-a . . . . . Lei 120

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu** și **G. Țițeica,** Vocabular Matematic . . . . . .Lei 20

X. **G. Țițeica,** Culegere de Probleme de Geometrie . . .Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. Istoric, învățăminte. Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 200 / pentru abonații G. M. și S. G. M. . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I. (Goniometrie) revăzută și adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** Culegere de Probleme de Aritmetică. Partea I. Aritmetica rațională . . . . . .Lei 190

XIV. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I-a. (Trigonometrie plană). Ediția II-a revăzută și adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

XV. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea I. Ediția IV-a revăzută și mărită . . . . . Lei 120

XVI. **G. Țițeica,** Culegere de Probleme de Geometrie Analitică. Partea I. Ediția II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 140

XVII. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea II-a. Ediția IV-a, revăzută și mărită . . . . . .Lei 240

Biblioteca Istorică a GAZETEI MATEMATICE

1. Elementele lui **Euclid.** (Cărțile I — VI de Geometrie plană) tradusă din limba greacă de *V. Marian* . . . . . .Lei 160

Suplimentul cu Exerciții. Abonamentul anual (9 numere) . . Lei 50

„Gazeta Matematică" apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plătește înainte și începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele și toată corespondența se trimite pe adresa:

Societății „GAZETA MATEMATICĂ"

Casa Gazeta Matematică — Calea Griviței No. 158. — București 2.

(Telefon: 3-9803).

M. O., IMPRIMERIA NAȚIONALĂ — C. 67.695

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL VII. No. 5 1 FEBRUARIE 1941

BIBLIOTECA CENTRALA
„ASOCIAȚIUNII"
SIBIIU

SOCIETATEA GAZETA MATEMATICĂ
CALEA GRIVIŢEI, 158. BUCUREŞTI 2. — TELEFON 3-9803

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL VII. No. 5 — 1 FEBRUARIE 1941

ABONAMENTUL LEI 50 PE AN (9 numere)

Soluţii şi orice corespondenţă pe adresa:

Locot. C. D. IONESCU-ŢIU

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviţei 158. — Bucureşti 2

EXERCIŢII REZOLVATE

Exerciţii Generale. *Exerc. 303. Să se găsească numărul de patru cifre abbc, al cărui compliment aritmetic este tot de această formă.*

GH. B.

Fie

$$N = abbc \quad \text{şi} \quad M = deef$$

numerele care răspund enunţului, deci satisfac egalitatea

$$abbc + deef = 10000$$

$$\therefore \qquad 1000\,(a+d) + 100\,(b+e) + c + f = 10000. \qquad (1)$$

Din (1) se vede că $c+f$ trebue să se dividă prin 10, şi cum $c+f \leqslant 18$ căci c şi f sunt cifre, înseamnă că nu putem lua decât

$$c+f = 0 \quad \text{sau} \quad c+f = 10.$$

Cazul I. $c+f = 0$. Egalitatea (1) devine

$$1000\,(a+d) + 110\,(b+c) = 10000 \qquad (2)$$

care arată că nu se poate avea decât

$$b+e = 10 \quad \text{sau} \quad b+e = 0.$$

Pentru $b+c = 10$ egalitatea (2) devine

$$10\,(a+d) + 11 = 100$$

care este o imposibilitate, căci membrul II se divide prin 10, iar membrul I nu.

Pentru $b + e = 0$, egalitatea (2) devine

$$a + d = 10$$

care dă

$$a = 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 \text{ sau } 1$$
$$d = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \text{ sau } 9$$

și deci numerele căutate sunt:

$$N = 9000, 8000, 7000, 6000, \ldots, 1000$$
$$M = 1000, 2000, 3000, 4000, \ldots, 9000.$$

Cazul II. $c + f = 10$. Egalitatea (1) devine

$$100\,(a + d) + 11\,(b + e) + 1 = 1000 \qquad (3)$$

care arată că $b + e + 1$ trebue să se dividă prin 10. Cum

$$1 \leqslant b + e + 1 \leqslant 18$$

nu putem lua decât

$$b + e + 1 = 10 \quad \therefore \quad b + e = 9 \qquad (4)$$

care dus în (3) dă

$$a + d = 9. \qquad (5)$$

Din egalitățile (5) și (4) și condiția $c + f = 10$, scoatem următoarele 3 grupe de valori pentru cifrele numerelor N și M.

Grupa I.

a	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

.

Grupa II.

b	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
e	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

.

Grupa III.

c	9	8	7	6	5	4	3	2	1
f	1	2	3	4	5	6	7	8	9

.

Asociind oricum câte 2 cifre corespondente din fiecare grupă se găsesc toate soluțiile problemei. Iată câteva exemple de soluții:

$$N = 9\ 88\ 7 \ ; \ 6\ 99\ 3 \ ; \ 1\ 77\ 5 ; \ldots$$
$$M = 0\ 11\ 3 \ ; \ 3\ 00\ 7 \ ; \ 8\ 22\ 5 ; \ldots$$

A se vedea exercițiul E. G. 352, care se propune în acest număr la pagina 128.

E. G. 304. Să se calculeze rădăcina patrată a lui 19 cu aproximație de $\frac{1}{17}$.

GH. B.

Dacă x este rădăcina căutată trebue ca

$$x^2 < 19 < \left(x + \frac{1}{17}\right)^2$$

$$\therefore \quad 17^2 \times x^2 < 17^2 \times 19 < (17x + 1)^2.$$

Rezolvind ultima neegalitate pentru $x > 0$ se găsește

$$x > \frac{-1 + 17\sqrt{19}}{17} = 4{,}29\ldots$$

4,29 este rădăcina căutată cu aproximație în minus, iar $4{,}29 + \frac{1}{17}$ cu aproximație în plus.

E. G. 305. Pentru ce valori ale lui n, suma

$$S = n^6 - n^4 - n^2 + 1$$

se divide prin 45?

GH. B.

Avem $45 = 3^2 \times 5$, iar suma dată se scrie

$$S = (n^2 + 1)(n^2 - 1)^2.$$

Numărul n poate avea următoarele forme față de divizorii 3 și 5:

$$n_1 = 3m \quad ; \quad n_2 = 3m \pm 1$$

$$n_3 = 5m \quad ; \quad n_4 = 5m \pm 1 \quad ; \quad n_5 = 5m \pm 2.$$

Se vede că pentru $n = n_1$, sau $n = n_3$, S nu se divide nici prin 3 nici prin 5.

Pentru $n = n_2$, factorul $(n^2 - 1)^2$ se divide *totdeauna* prin 9, deci S se divide prin 9 când $n \neq 3m$. La fel $(n^2 - 1)$ se divide prin n_4, iar $(n^2 + 1)$ se divide prin n_5. Deci S se divide *totdeauna* prin 5 când $n \neq 5m$.

Rezultă că S se divide prin 45 pentru toate valorile lui n prime cu 3 și 5.

E. G. 306. Se cere numărul N, *știind că dacă după el se scrie* 8N *se obține patratul lui* 3N.

GH. B.

Conform enunțului avem

$$9N^2 = N \times 10^n + 8N$$

$$\therefore \qquad N = \frac{10^n + 8}{9} \qquad (1)$$

unde n este numărul cifrelor lui 8N. Din (1) se vede că sunt o infinitate de numere N care răspund problemei. Efectuând diviziunea prin 9 numărul N se mai scrie sub forma întreagă

$$N = 11 \ldots 12.$$

E. G. 318. Numărul $[a(a \pm 2) + 3]$ *poate fi patrat perfect?*

I. L.

I. $N = [a(a \pm 2) + 3] = (a \pm 1)^2 + 2.$

Notăm $a \pm 1 = x$ și atunci trebue să avem:

$$x^2 + 2 = y^2$$

$$\therefore \quad (y - x)(y + x) = 2.$$

Deducem deci sistemele de ecuații:

$$\begin{cases} y + x = 1 \\ y - x = 2 \end{cases} \qquad \text{și} \qquad \begin{cases} y + x = 2 \\ y - x = 1. \end{cases}$$

Prin rezolvare găsim:

$$a = \pm\frac{1}{2} \quad \text{sau} \quad a = \pm\frac{3}{2}.$$

II. $N = [a(a \pm 2) + 3] = (a \pm 2)^2 - 1.$

Notăm $a \pm 2 = x$ și atunci trebue să avem:

$$x^2 - 1 = y^2.$$

Ceea ce ne dă:

$$x = \frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{m}\right) \quad \text{și} \quad y = \frac{1}{2}\left(m - \frac{1}{m}\right).$$

E. G. 320. Să se calculeze x astfel încât să avem:

$$\varphi_x(1941) = 1.$$

I. L.

Avem: $1941 = 3 \cdot 647$

$\varphi_1(1941) = 2^3 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 19 \ldots$. indicatorul lui 1941

$\varphi_2(1941) = 2^8 \cdot 3^2 \ldots\ldots$ indicatorul lui φ_1

$\varphi_3(1941) = 2^8 \cdot 3 \ldots\ldots$ indicatorul lui φ_2

$\varphi_4(1941) = 2^8 \ldots\ldots$ indicatorul lui φ_3

. . . . . .

. . . . . .

$\varphi_{11}(1941) = 2 \ldots\ldots$ indicatorul lui φ_{10}

$\varphi_{12}(1941) = 1.$

Prin urmare $x = 12$.

E. G. 323. (enunț rectificat). *Știind că* $\sigma(I)$ *reprezintă suma numerelor prime cu* I *și mai mici decât el și* $\varphi(I)$ *indicatorul lui* I, *în ce caz avem?*

$$\varphi[\sigma(2^\alpha)] > \sigma[\varphi(2^\alpha)].$$

I. L.

In general avem:

$$\sigma(I) = \frac{1}{2} I \cdot \varphi(I).$$

Prin urmare:

$$\varphi(2^\alpha) = 2^{\alpha-1} \quad \text{și} \quad \sigma(2^{\alpha-1}) = 2^{2(\alpha-2)}$$

$$\sigma(2^\alpha) = 2^{2(\alpha-1)} \quad \text{și} \quad \varphi[2^{2(\alpha-1)}] = 2^{2(\alpha-1)-1}.$$

Prin urmare totdeauna vom avea:

$$2^{2(\alpha-1)-1} > 2^{2(\alpha-2)}.$$

E. G. 324. Să se rezolve ecuația:

$$\varphi_x(1940) = \varphi_y(1941)$$

$\varphi_i(I)$ *fiind indicatorul de ordinul i a lui* I.

I. L.

Avem :

$1940 = 2^2 . 5 . 97$	$1941 = 3 . 647$
$\varphi_1 (1940) = 2^8 . 3$	$\varphi_1 (1941) = 2^3 . 3 . 17 . 19$
$\varphi_2 (1940) = 2^8$	$\varphi_2 (1941) = 2^8 . 3^2$
. . . . .	$\varphi_3 (1941) = 2^8 . 3$
. . . . .	$\varphi_4 (1941) = 2^8$
$\varphi_{10} (1940) = 1$	. . . . .
	. . . . .
	$\varphi_{12} (1941) = 1.$

Prin urmare avem $y = x + 2$ unde $x = 1, 2, \ldots 10.$

Până la 10 Ianuarie s'au primit soluțiuni bune pentru exercițiile publicate în numerele 1, 2, 3 anul VII, dela[1]):

Școala Centrală de fete, București

Clasa III-a : Miuță Florica (III : 145).

Clasa V-a : Teodorescu Maria (V : 622, 3, 6, 7*, 31), Dumitrescu A. (V : 626, E. G. : 298).

Clasa VI-a : Ottone C. P. (E. G. : 298, VI : 608, 27).

Clasa VII-a : Timotin Al. S. (VII : 519).

Liceul de fete „Iulia Hașdeu", București.

Clasa VII-a : Iorga Aneta (E. G. : 298, VII : 530*, 5, VIII : 418), Marinică Em. (VII : 530), Stoia N. S. (E. G. : 298, 9, 300, 13, VII : 537).

Liceul de fete „Carmen-Sylva", București.

Clasa III-a : Kogălniceanu M. Olga (E. G. : 312, III : 147, 8).

Clasa V-a : Damian C. Lucia (V : 646).

Clasa VI-a : Petrov E. A. (VI : 608, 21), Damian C. Cornelia (VI : 621), Georgescu I. Georgeta (VI : 621), Epure Marilena (E. G. : 313, 5, VI : 621), Vasilescu Maria (VI : 601).

Clasa VII-a : Vasilescu O. A. (E. G. : 298), Davidoglu A. Mira (VII : 521*, 5*).

---

1) Semnul * însoțește numărul unui exercițiu rezolvat foarte bine.

Liceul de fete „Aurel Vlaicu", Bucureşti.

Clasa V-a: Mănescu Gh. Margareta (V: 626).

Internatul Ortodox, Bucureşti.

Clasa IV-a: Mateescu P. M. Viorica (IV: 517*, 8*, 24*, 5*, 30, ,

Liceul de fete „Despina Doamna", Ploeşti.

Clasa V-a: Boca C. Stelica (V: 626).

Liceul de fete „Oltea Doamna", Iaşi.

Clasa VII-a: Popovici I. Florica (VII: 519, 34, 5, 6), Teodorescu G. Olga (VII: 534, 6).

Colegiul Naţional „Sf. Sava", Bucureşti.

Clasa IV-a: Harbunicu P. Vasile (IV: 515, 8, E. G.: 298, 9, 301 Ionescu M. Gh. (IV: 512, 5).

Clasa V-a: Dumitrescu D. F. (E. G.: 298, 300, V: 626, 34, VIII: 429),, Bâlcu Niculae (V: 614), Mişicu V. Mircea (E. G.: 313, 5, V: 613, 26, 7, 33 4, 8, 46, 52, VIII: 429).

Clasa VI-a: Ştefănescu-Priboi St. C. (E. G.: 298, 315, VI: 604, 8), Stoika V. V. (VI: 600, 6, 21, 6).

Clasa VII-a: Andonie St. Iancu (E. G.: 298, 300, 10, 1, 6, VII: 524, 5, 6, 7, 8, 47, 8, 54, 8, VIII: 424), Bottea V. Radu (VII: 536, 40, 4), Nadolu Grigore (VII: 520, 7, 8), Sclavu T. Dionisie (VII: 519, 20, 7, 8).

Clasa VIII-a: Cindrescu F. I. (E. G.: 298).

Liceul „Aurel Vlaicu", Bucureşti.

Clasa VII-a: Calmuschi Gh. Ion (VII: 527, 8, 30), Mănescu Gh. Ion (VII: 527, 30), Popescu Tiberiu (VII: 521, 4, 7, 8, 34, 5, 6, 42).

Clasa VIII-a: Barbaiani A. Ion (E. G.: 289, 90, 8, 9, 302, 3, 6*, 8, 10*, 1*, VIII: 409, 10*, 1, 7*), Buga I. M. (E. G.: 298, 9, 300, 6, 7*, 8*, 12, VIII: 411*, 4, 7), Davidescu M. Al. (E. G.: 298, 9, 300, 8, VIII: 411).

Liceul „Gh. Lazăr", Bucureşti.

Clasa V-a: Brânceni N. I. Bogdan (E. G.: 332, 3, V: 613, 32, 3, 4, 5) Timotin Alex. (V: 619).

Clasa VII-a: Brânceni N. I. Călin (E. G.: 298, 9, 300, 21, 2, 8, 34, VII: 535), Ghimuş A. Dumitru (VII: 520, 35, 6), Lăzărescu Cezar (E. G. 328, 32, 3).

Liceul „Gh. Şincai", Bucureşti.

Clasa VI-a: Constantinescu Emil (E. G.: 298, 9, 306, VI: 601, 6, 7).

Clasa VIII-a: Tudor I. Anghel (E. G.: 298, 9, 300, VIII: 409, 10, 6, 7).

Liceul „Matei Basarab", Bucureşti.

Clasa IV-a: Ieşan Şt. Al. (IV: 523, 30, V: 616, 8, 46).

Clasa V-a: Antonescu D. Eug. (V: 614, 6, 26).

Liceul „Mihai Viteazul", București.

Clasa V-a: VERNESCU V. MIHAIL (V: 622, 5, 6, 46).
Clasa VII-a: BĂLUȚĂ N. T. (E. G.: 315, VII: 519*), PREDOLEANU E. N. (VII: 519, 20, 2, 7, 8), VERNESCU V. N. (VII: 535).
Clasa VIII-a: VERNESCU V. P. (E. G.: 298, 315, VIII: 421, 8).

Liceul „M. Eminescu", București.

Clasa VI-a: ARON I. GH.: (E. G.: 298, VII: 527, 8).

Liceul „Titu Maiorescu", București.

Clasa V-a: NICULESCU A. N. (E. G.: 333, V: 616, 29).
Clasa VII-a: MARINESCU A. I. V. (E. G.: 300, VII: 524), LUPU N. A. (VII: 527), SENI CLAUDIU (E. G.: 315, 33, VII: 521, 7, 33*, 4).
Clasa VIII-a: BUGAIEVSKI E. (E. G.: 298).

Liceul „Spiru Haret", București.

Clasa VIII-a: NEGRESCU C. I. (E. G.: 307, VIII: 420).

Liceul „Marele Voevod Mihai", București.

Clasa V-a: AVRAMESCU D. (V: 524, 622, 3).
Clasa VI-a: BRATU I. EUG. (VI: 607).

Institutul „Schewitz Thierrin", București.

Clasa IV-a: MĂRGĂRIT I. F. (IV: 512, 3).
Clasa VII-a: FLORESCU N. MOISE (VII: 527, 8), POPESCU C. ION (VII: 528), PĂSĂRICĂ ION (VII: 520, 35).
Clasa VIII-a: DEMILONA CORNEA P. P. (E. G.: 315, 22, VIII: 429). MĂRGĂRIT I. N. (E. G.: 298, 9, 313*, 21, VIII: 414, 7, 20*, 1, 2, 8, 31).

Liceul „Dr. Ion Meșotă", Brașov.

Clasa III-a: VELTER A. M. (III: 147).
Clasa V-a: CĂTĂNOIU N. N. (V: 615, 6, 22), DUMITRAȘCU OCTAVIAN (V: 613), OUATU GH. I. (V: 613, 26).
Clasa VI-a: GEORGESCU M. M. (VI: 608), STELIAN H. (VI: 601).
Clasa VII-a: GOLOGAN G. H. (VII: 525, 6).

Liceul „B. P. Hașdeu", Buzău.

Clasa VII-a: ANGELESCU V. (E. G.: 283, 4, 5).
Clasa VIII-a: ALDEA V. M. (E. G.: 298, 9, 300, 1, 6*, 7, 8, 10*, 1*, 3, 4, 5, 6, 8, 21, 2, 6, 7, 8, 30, VIII: 410*, 1*, 7*, 8*, 9*, 21, 2, 3*, 4).

Liceul „Avram Iancu", Brad.

Clasa V-a: MIHUȚIU GH. ADRIAN (V: 626).

Liceul „Ioniță Assan", Caracal.

Clasa VII-a: Musceleanu I. St. V. (E. G.: 283, 4, 5, 98, 9, 300, 13, 5, 6, VII: 519, 27, 8, 9, 34, 5, 6, 7, 44), Musceleanu D. (VII: 527, 35), Dobrescu T. G. (VII: 519).

Clasa VIII-a: Crăciuneanu G. C. (E. G.: 315, VIII: 418).

Liceul „D. B. Știrbey", Câmpina.

Clasa VI-a: Rădulescu N. N. (E. G.: 298, 9, 300, 25, VI: 600, 19*, 23*).

Clasa VII-a: Tudose I. C. (E. G.: 298).

Liceul „Mircea cel Bătrân", Constanța.

Clasa V-a: Bambaccian A. (V: 626).

Clasa VII-a: Sotiriu H. T. (VII: 525, 7, 8, 35, 6, 40, 2).

Liceul „Știrbei Vodă", Călărași.

Clasa VIII-a: Ionescu N. Vasile (VIII: 424), Nițoiu I. G. (VIII: 424).

Liceul Militar „D. A. Sturdza", Craiova.

Clasa VII-a: Mateescu Aurel (E. G.: 298, 9, 300, 18, 21, 8, 34, VII: 519, 35), Rădulescu M. V. (E. G.: 298, 300, 1).

Liceul militar „Ștefan cel Mare", Cernăuți.

Clasa V-a: Staicu C. (E. G.: 298, 300, 15, V: 626).

Colegiul Național „Carol I", Craiova.

Clasa VIII-a: Popescu I. A. (VIII: 418).

Liceul „Unirea", Focșani.

Clasa VIII-a: Doagă I. Șt. (E. G.: 298, 9, 300).

Liceul „Ion Maiorescu", Giurgiu.

Clasa VIII-a: Văduva F. M. (E. G.: 283, 4, 5).

Liceul militar „General Makarovici", Iași.

Clasa III-a: Bălășcuță T. T. (III: 148), Bârzescu M. (E. G: 332, 3, III: 148, 9), Ciortoloman S. (E. G.: 332), Ciuman V. (E. G.: 332, III: 148, 9), Ciureanu C. (III: 149), Dimitriu N. (III: 148, 9), Lupu M. (III: 148), Marinescu N. G. (III: 148), Nache D. (III: 148, 9), Radu M. C. (III: 148).

Clasa IV-a: Edu C. E. (IV: 515), Solescu M. (IV: 513).

Clasa V-a: Andrei A. (E. G.: 298, 305, 13, VI: 608, VIII: 418), Baciu C. D. (V: 622, 3, VII: 418), Brasinceanu C. C. (E. G.: 305), Chirică A. N. (E. G.: 313, V: 621, VI: 608, VIII: 418), Davidescu P. G. (V: 622, VI: 608), Ionescu M. (V: 621, VI: 608), Palade T. (V: 622, 3, VI: 608), Platon C. Romeo (V: 621, VI: 608), Popa N. N. (E. G.: 313, VI: 608, VIII: 418), Virgil P. (E. G.: 299), Zaharia M. (V: 621, 2).

Clasa VI-a : Frunză I. V. (VI : 610), Mateescu Gh. (VI : 601).

Clasa VII-a : Bogdan Gh. (E. G. : 290, 3, 4, 313, 5, VII : 527, 9, 30, 5, 6*, VIII, 418), Dăscălescu V. Ion (VII : 527), Dimitriu C. R. (VIII : 418), Drăghicescu P. P. (E. G : 283, 4, 5, 90, 3, 4, 5, 314, 5, 28, VII : 519*, 24, 7, 35, 6*, VIII : 418), Eliade V. (VIII : 418) : Ivan Gh. Z. (VII : 527), Mateescu Gh. M. (VII : 527), Manoliu V. (VII : 527, 30, VIII : 418), Oslobeanu I. M. (VII : 527), Pârlog I. I. (VII : 527), Popa N. A. (E. G. : 298, 9, 300, 2, 3, 5, 6, 12, 15, 6, 8, 21, 2, 5, 6, 7, VII : 519, 24, 7, VIII : 411, 7), Romanescu C. (VIII : 418), Stamate A. (E. G. : 298, 300, 3, 5, VII : 527, VIII : 418), Tache D. D. (VII : 527).

Clasa VIII-a : Gheorghiu P. (E. G. : 285), Jiletcovici A. (E. G. : 283, 3, 5), Naforniță D. D. (E. G. : 285), Pașcanu I. C. (E. G. : 284, 5), Potopeanu Gh. (E. G. : 285), Prigoreanu Gh. (E. G. : 285), Rohr I. Al. (E. G. : 283).

Liceul militar „N. Filipescu", Mânăstirea Dealu.

Clasa III-a : Volanski Ał. D. (III : 147).

Clasa VIII-a : Bârlea-Suhățeanu G. V. (E. G. : 298, 318, 26).

Liceul „Sf. Petru și Pavel", Ploești.

Clasa IV-a : Buzatu C. (IV : 512, 3, 5, 21, 30, 8).

Clasa V-a : Iupceanu N. N. (V : 614, 5, 8, 9, 23, 6), Vintilescu Al. G. (V : 614, 22, 3*).

Clasa VI-a : Cătuneanu N. T. (VI : 600, 13), Moțoiu St. C. (VI : 600, 13).

Clasa VII-a : Bereanu M. B. (E. G. : 294, 8, 9, 300, 1, 2).

Clasa VIII-a : Zotta St. St. (VIII : 428).

Liceul „Radu Greceanu", Slatina.

Clasa VII-a : Zeveleanu Gh. C. (E. G. : 298, VII : 519, 27, 35, 47).

Liceul militar „Mihai Viteazu", Târgu-Mureș.

Clasa VII-a : Baranga Gh. (VII : 527, 8, 35), Jipa I. C. (VII : 527), Ungureanu P. I. (VII : 527, 35).

Liceul „Diaconovici Loga", Timișoara.

Clasa VIII-a : Bakonyi C. (VIII : 414, 428*, 9, 35), Boleanțu L. (E. G. : 298, 9, 300, 25).

Liceul „Traian", Turnu-Severin.

Clasa V-a : Dumitrescu Gh. T. (V : 614, 22, 6).

Clasa VI-a : Corâci I. C. (E. G. : 283, 3, 5, 94, 8, 300, 7, VII : 549*).

Clasa VIII-a : Bengulescu A. G. (E. G. : 298, 300, 13, 5, 6, 8, 25, VIII : 417), Mihail I. G. (E. G. : 298, 9, 300, 10, 11, VIII : 417).

Elevi Particulari.

Clasa VII-a : Cotariu D. M. (E. G. : 283, 4, 5, 8, 90, 3, 4).

Clasa VIII-a : Moscovici N. (E. G. : 298, 9, 300, VIII : 424).

EXERCIȚII PROPUSE

Soluțiile exercițiilor propuse în acest număr se primesc până la 1 Mai 1941

Clasa III-a. *Exerc. 158.* Fiind dat un dreptunghiu ABCD, construim patratul DCEM în afara dreptunghiului dat. Dreapta AE taie pe CD în punctul F. Să se arate, că triunghiul BCF și trapezul DFEM sunt figuri echivalente.

Se păstrează proprietatea, dacă construim patratul DCEM către interiorul dreptunghiului dat?

O. N. Ț.

III. 159. Fie M și N respectiv mijloacele diagonalelor BD și AC ale trapezului dat ABCD. Din M și N ducem paralelele MP și NR la AC și BD întâlnind respectiv pe AB și CD în punctele P și R. Să se arate că dreapta PR este paralelă cu BC.

O. N. Ț.

III. 160. Fie trapezul dat ABCD. Prin mijlocul M al diagonalei AC ducem dreapta PR paralelă la BD, care taie pe CB și CD respectiv în P și R. Să se calculeze lungimea segmentului PR. Să se deducă apoi lungimea segmentului MR. Aplicație:

$$\overline{AD} = 100 \text{ cm} \; ; \; \overline{BC} = 240 \text{ cm} \; ; \; \overline{BD} = 280 \text{ cm}.$$

O. N. Ț.

III. 161. Fie triunghiul ABC și mediana lui CC'.

1. Să se împartă latura CA în trei părți egale:

$$\overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EA}.$$

2. Paralela dusă prin E la AB taie pe CC' în M, și pe CB în N, iar dreapta ND taie pe CC' în P.

Să se arate, că dreapta BM trece prin mijlocul segmentului DE și că dreapta PE este paralelă cu dreapta AM.

O. N. Ț.

III. 162. In triunghiul dat ABC unghiul B este cel mai mare. Prin vârful B ducem în interiorul triunghiului segmentele BD şi BE făcând respectiv cu BA şi BC unghiuri egale cu (B — A) şi (B — C); punctele D şi E fiind pe latura AC.

Să se arate: 1. Segmentele BD şi BE sunt egale.

2. Unul din ele este a patra proporţională între laturile triunghiului dat.

3. Distanţa dintre picioarele lor este dată de relaţia:

$$\overline{DE} = \frac{1}{\overline{AC}}(\overline{BA}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2).$$

O. N. Ţ.

Clasa IV-a. *Exerc. 550.* Să se rezolve ecuaţia:

$$\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}} + 1 = 0.$$

Verificarea soluţiei aflate.

N. M.

IV. 551. Să se rezolve ecuaţia:

$$\frac{b+c}{x^2-9} = \frac{b}{x^2-6x+9} + \frac{c}{x^2+6x+9}$$

şi să se verifice soluţia aflată.

O. N. Ţ.

IV. 552. Să se rezolve ecuaţia:

$$\frac{6x^2+49x+35}{2x^2+35x+56} = \frac{6x^2+10x+12}{2x^2+22x-73},$$

şi să se verifice soluţia aflată.

O. N. Ţ.

IV. 553. Să se rezolve ecuaţia:

$$\frac{3x^2+5x+7}{9x^2+21x+11} = \frac{5x^2-3x+7}{15x^2+x+11}$$

şi să se verifice soluţia, care este diferită de *zero*.

O. N. Ţ.

IV. 554. Să se rezolve ecuaţia:

$$\frac{7x^2+13x+17}{x^2+5x+6}=\frac{7x^2+20x-12}{x^2+6x+5}$$

şi să se verifice soluţia aflată.

O. N. Ţ.

IV. 555. Să se rezolve ecuaţia:

$$\frac{14}{x-3}-\frac{13}{x-2}=\frac{76}{10x+5}-\frac{33}{5x+15}$$

şi să se verifice soluţia aflată.

O. N. Ţ.

IV. 556. Fiind dat un paralelipiped dreptunghiu ABCDEFGH, construim centrele I, K, L, M, N, P ale feţelor lui

ADHE, BCGF, ABCD, EFGH, ABFE, DCGH.

1. Să se arate, că volumul solidului S care are vârfurile în punctele I, L, N, M, P, K este o *treime* din volumul paralelipipedului dat.

2. Să se calculeze lungimile muchiilor solidului S în raport cu dimensiile paralelipipedului dat şi suprafaţa totală a acestui solid.

O. N. Ţ.

IV. 557. Fie dat cubul ABCDEFGH cu latura de 6 cm. Prin muchia BC ducem un plan P, care face cu planul bazei BCHG un unghiu diedru de 30°; planul P taie muchiile GF şi HE respectiv în punctele M şi N, iar muchiile AF şi DE în R şi S.

Să se calculeze volumul şi suprafaţa totală a prismei ABRDCS.

O. N. Ţ.

IV. 558. Fiind dat un cub ABCDEFGH cu latura de 162 cm, ducem prin muchia BC un plan (P_1), care face cu planul bazei BCHG un unghiu diedru de 30°; asemenea ducem prin muchia GH un plan (P_2), care face cu faţa GHEF un unghiu diedru de 30°. Planul (P_1) taie muchiile DE şi AF în M şi N respectiv, iar planul (P_2) taie aceleaşi muchii DE şi AF în P şi R. Fie I şi L punctele determinate de perechile de drepte (CM, HP) şi (BN, GR).

1. Să se determine volumul şi suprafaţa totală a prismei IMPLNR.

2. Aceeaşi problemă pentru cazul când cubul dat este înlocuit printr'un paralelipiped dreptunghiu ABCDEFGH cu dimensiile:

$$\overline{BC} = 18 \text{ cm}; \quad \overline{BG} = 48 \text{ cm}; \quad \overline{BA} = 42 \text{ cm}.$$

O. N. Ţ.

IV. 559. Fiind dat un cub ABCDA'B'C'D', cu latura $\overline{AB} = 3a$, ducem prin muchia AA' două plane (P_a) şi (Q_a), care împart unghiul diedru (AA') al cubului în trei părţi egale. Facem acelaşi lucru pentru unghiurile diedre (BB'), (CC'), (DD'). Planul (P_a) taie muchiile CD, C'D' respectiv în punctele E, E'; planul (Q_a) taie muchiile BC, B'C' în punctele F, F' respectiv.

Planele analoage (P_b), (Q_b) taie respectiv perechile de muchii (CD, C'D') şi (AD, A'D') în punctele H, H' şi G, G'; planele (P_c), (Q_c) taie perechile de muchii (AB, A'B') şi (DA, D'A') în punctele I, I' şi L, L'; planele (P_d), (Q_d) taie perechile de muchii (BC, B'C') şi (BA, B'A') în punctele M, M' şi N, N'.

1. Să se precizeze aşezarea punctelor obţinute pe laturile celor două baze faţă cu mijloacele şi extremităţile acestor laturi.

2. Să se calculeze *volumul* şi *suprafaţa laterală* a prizmei obţinute EHGLINMFE'H'G'L'I'N'M'F'.

3. Să se generalizeze problema pentru un paralelipiped dreptunghiu dat.

(*Notă.* Calculele vor fi făcute cu valorile exacte, nu aproximative).

O. N. Ţ.

Clasa V-a. *Exerc. 655.* Fie A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2; a, b, c şi S respectiv picioarele medianelor, înălţimilor, laturile şi suprafaţa unui triunghiu oarecare ABC.

1. Să se demonstreze relaţia:

$$\overline{A_1A_2}^2 + \overline{B_1B_2}^2 + \overline{C_1C_2}^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) - 4S^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right).$$

2. Din formula precedentă să se deducă formula suprafeţei triunghiului echilateral de latură dată.

V. Gh.

V. 656. Să se simplifice expresia:

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}.$$

G. G. C.

V. 657. Se dă ecuaţia:

$$x^2 + (m+2)\,x + m + n + 1 = 0$$

între rădăcinile căreia, x' şi x'', are loc relaţia:

$$x'^3 + x''^3 + 3\,(x' + x'')^2 = 1.$$

Să se afle relaţia dintre m şi n; apoi să se rezolve ecuaţia în cazul când $m = 3$.

H. P. I.

V. 658. Să notăm cu m_a, m_b, m_c lungimile medianelor unui triunghiu ABC, iar cu S_a, S_b, S_c lungimile simedianelor [1]).

Să se arate că avem relaţiile:

$$\frac{m_a}{a\,.\,S_a} + \frac{m_b}{b\,.\,S_b} + \frac{m_c}{c\,.\,S_c} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc},$$

$$\frac{m_a}{(b^2 + c^2)\,S_a} + \frac{m_b}{(c^2 + a^2)\,S_b} + \frac{m_c}{(a^2 + b^2)\,S_c} = \frac{1}{4Rr},$$

restul notaţiilor fiind cele obişnuite.

G. D. S.

V. 659. Fie M şi N mijloacele diagonalelor BD şi AC ale trapezului dat ABCD. Prin M şi N ducem MP şi NR paralele respectiv la AC şi BD care taie pe AB şi DC în punctele P şi R.

Să se arate, că patrulaterul MNRP este trapez.

Să se calculeze apoi perimetrul şi suprafaţa trapezului MNPR.

O. N. Ţ.

V. 660. Sunt date două cercuri (C_1) şi (C_2) de raze R_1 şi R_2 şi un punct O aşezat pe dreapta centrelor astfel ca $\overline{OC_1} = a$, $\overline{OC_2} = b$. Prin punctul O să se construiască o secantă comună $A_1B_1A_2B_2$ la cele două cercuri, astfel ca suma patratelor coardelor determinate $\overline{A_1B_1}$ şi $\overline{A_2B_2}$ să fie o arie dată $4l^2$. Discuţie.

(*Notă.* Să se facă efectiv construcţiile în cazul când condiţiile de posibilitate ale problemii sunt îndeplinite).

O. N. Ţ.

---

1) *Simediana* unui vârf împarte latura opusă în raportul patratelor laturilor ce pornesc din acelaşi vârf; ea este simetrica medianei adiacente faţă de bisectoarea (adiacentă).

V. 661. Sunt date: două cercuri (C_1) şi (C_2) cu razele R_1 şi R_2; un punct O pe segmentul C_1C_2 împărţindu-l în raportul $\frac{\overline{C_1O}}{\overline{OC_2}} = k$. Prin punctul O să se ducă o secantă comună $A_1B_1A_2B_2$ la cele două cercuri, astfel ca suma lungimilor coardelor determinate A_1B_1 şi A_2B_2 să fie o lungime dată $2l$.

Discuţie. Cazuri particulare:

a) $l = R_1 + R_2$; *b)* $l = R_1 - R_2$; *c)* $k = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $l = \frac{R_1 + R_2}{2}$;

d) $k = 1$, $l = \sqrt{R_1^2 + R_2^2}$.

O. N. Ţ.

V. 662. Un cerc B trece prin centrul unui cerc A şi este tangent cercului (A) în punctul C. Să se ducă o secantă comună MNPQ, astfel ca lungimile segmentelor MN, NP, PQ să fie direct proporţionale cu trei numere date *a*, *b*, *c*. Discuţie.

(*Notă.* Se vor lua ca necunoscute distanţele secantei la centrele A şi B).

O. N. Ţ.

V. 663. Fiind dat un patrat MNPQ şi cercul său circumscris O, să se ducă o coardă ABCEFG, paralelă la una din laturile patratului dat (punctele B, F fiind intersecţiile secantei cu laturile patratului, iar C, E cu diagonalele lui), astfel ca segmentele AB, CE, FG să fie egale.

Să se construiască exact soluţiile problemii.

O. N. Ţ.

V. 664. Sunt date două cercuri (A) şi (B) de raze R_a şi R_b, având distanţa centrelor $\overline{AB} = 2m$. Fie C mijlocul segmentului AB. Să se determine un cerc C, pentru care coardele DE şi FG determinate de el în cercurile (A) şi (B) să poată fi catetele unui triunghiu dreptunghiu de ipotenusă dată $2l$. Discuţie.

O. N. Ţ.

Clasa VI-a. *Exerc. 638.* Se dau latura neegală *a* şi bisectoarea β a unghiului B adiacent acestei laturi din triunghiul isoscel ABC. Să se exprime $\cos \frac{B}{2}$ în funcţie de elementele date şi să se facă formula calculabilă prin logaritmi. Discuţie.

G. G. C.

VI. 639. Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt[\operatorname{tg}x]{\operatorname{cotg}35^0\,12'\,16''} - \sqrt[\operatorname{cotg}x]{\operatorname{tg}70^0\,42'\,48''} = 0.$$

G. D. S.

VI. 640. Dacă A, B, C sunt unghiurile unui triunghiu și dacă punem:

$$\frac{c\cos B}{b} = \operatorname{tg}\varphi \quad ; \quad \frac{b\cos C}{c} = \operatorname{tg}\theta,$$

atunci condiția: $A + \varphi + \theta = \pi$, atrage după sine relația:

$$\cos B + \cos C + \sin B \,.\, \sin C \,.\, \operatorname{tg} A = 0.$$

G. D. S.

VI. 641. Intr'un triunghiu oarecare ABC, însemnând cu d_a, d_b, d_c distanțele centrului cercului înscris la vârfurile triunghiului, avem relația:

$$d_a + d_b + d_c + 4R = 8R\left[\cos\frac{B-C}{4}\cos\frac{C-A}{4}\cos\frac{A-B}{4} - \sin\frac{B-C}{4}\sin\frac{C-A}{4}\sin\frac{A-B}{4}\right].$$

Ce devine această relație, când înlocuim centrul cercului înscris prin centrul unui cerc exînscris triunghiului?

O. N. Ț.

VI. 642. Sunt date un segment $\overline{AB} = a$ în planul P și unul $\overline{OC} = h$ perpendicular în punctul O pe planul P, așezate astfel încât proiecția lui $\overline{OC}$ pe planul ABC este cât jumătatea lui, iar cercul descris pe diametrul $\overline{AB}$ în planul P trece prin O.

Care sunt distanțele punctelor A și B la capetele perpendicularei $\overline{OC}$? Discuție.

O. N. Ț.

VI. 643. Fiind dat triunghiul oarecare ABC se construiesc dreptele AA', BB', CC' formând cu laturile respective unghiurile $\sphericalangle AA'C = \alpha$, $BB'A = \beta$, $CC'B = \gamma$ mai mari respectiv ca unghiurile B, C, A.

Fie M, N, P intersecțiile perechilor de drepte :

$$(BB', CC') \ ; \ (CC', AA') \ ; \ (AA', BB').$$

Să se calculeze perimetrul și aria triunghiului astfel format, MNP. Consecințe interesante.

O. N. Ț.

VI. 644. Intr'un paralelogram dat ABCD, unghiul AOB al diagonalelor este egal cu α, iar unghiul CAD al diagonalei AC cu latura AD egal cu γ. Fie M, N, P, R punctele în care o secantă taie pe BC, BD, AC, AD. Să se arate că, dacă

$$\overline{MN} = \overline{NP} = \overline{PR},$$

avem relația:

$$\operatorname{tg} \widehat{MRA} = \frac{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}2\gamma + 1 - \sec 2\gamma}{\operatorname{tg}2\gamma - \operatorname{tg}\alpha}.$$

O. N. Ț.

VI. 645. Dintr'un punct S la un plan P avem o perpendiculară $\overline{SC}$ și două oblice $\overline{SA}$, $\overline{SB}$ făcând respectiv cu planul P unghiurile α, β și astfel că unghiul ACB este egal cu γ.

Din punctul C ducem $\overline{CM}$ și $\overline{CP}$ respectiv perpendiculare pe SA și SB. Dacă însemnăm cu V volumul solidului CMABP, să se arate că avem :

$$V = \frac{1}{6} \overline{SC}^3 . \sin\gamma \operatorname{cot}\alpha \operatorname{cotg}\beta (1 - \sin^2\alpha \sin^2\beta).$$

O. N. Ț.

VI. 646. Să se rezolve sistemul de ecuații :

$$\frac{\sin(x-y)}{\sin(x+y)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\beta} \ ; \ \frac{\cos(x-y)}{\cos(x+y)} = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta}.$$

Aplicație : $\alpha = 24^0$, $\beta = 42^0$.

O. N. Ț.

VI. 647. Fie planul P și perpendiculara $\overline{OS}$ în punctul O pe acest plan, având $\overline{OS} = a$.

Din punctul S să construiască la planul P trei oblice SA, SB, SC făcând respectiv cu planul P unghiuri date α, β, γ și astfel că

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{OS}.$$

Discuție.

Să se calculeze apoi volumul piramidei SABC.

Caz particular: $\overline{OS} = 2$ m; $\alpha = 45^0$, $\beta = 30^0$, $\gamma = 60^0$.

O. N. Ț.

VI. 648. Un trapez ABCD are baza mare $\overline{BC} = a$, iar unghiul diagonalelor α. Știind încă, că diagonalele BD și CA sunt respectiv bisectoarele unghiurilor trapezului alăturate bazei $\overline{BC}$, să se calculeze *perimetrul* și *aria* trapezului ABCD. Caz particular:

$$a = 20 \text{ cm}\ ,\quad \alpha = 120^0.$$

O. N. Ț.

VI. 649. Fie ABC un triunghiu ABC, o dreaptă AA′ trecând prin vârful A al triunghiului, D, E proiecțiile vârfurilor B, C pe această dreaptă.

Să se determine poziția dreptei AA′ astfel ca segmentul DE să aibă o lungime dată. Discuție.

O. N. Ț.

Clasa VII-a. *Exerc. 559.* Să se calculeze produsul:

$$u_n = \frac{1}{a}\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[9]{a^4} \cdot \sqrt[27]{a^8} \cdot \ldots \sqrt[3^n]{a^{2^n}},$$

precum și limita sa când n tinde către infinit.

G. G. C.

VII. 560. Să se determine poziția planului paralel bazei unui con echilateral înscris într'o sferă, astfel ca diferența secțiunilor plane, în sferă și con, să fie maximă.

G. G. C.

VII. 561. Să se studieze și să se reprezinte variația funcției:

$$y = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2x}.$$

O. N. Ț.

VII. 562. Să se studieze şi să se reprezinte variaţia funcţiei:

$$y^2 = \frac{x+5}{x+3} - \frac{x+3}{x+5}.$$

O. N. Ţ.

VII. 563. Să se studieze şi să se reprezinte variaţia funcţiei:

$$y = \cos^2 2x + 4\cos^2 x - 1.$$

O. N. Ţ.

VII. 564. Pe latura BC a triunghiului ABC luăm un punct fix M, iar pe segmentele $\overline{MB}$, MC către interiorul triunghiului construim segmente de cerc capabile de un unghiu α, care taie respectiv laturile AB şi AC în P şi N.

Să se studieze variaţia suprafeţii triunghiului PMN, când α variază rămânând *mai mare* decât cel mai mare din unghiurile BAM, MAC şi *mai mic* decât *cel mai mic* din unghiurile $\pi - B$, $\pi - C$. Discuţie.

O. N. Ţ.

VII. 565. Să se studieze şi să se reprezinte variaţia funcţiei:

$$y = \frac{x^{2n} - 6x^n + 5}{x^{2n} + 6x^n + 5},$$

n fiind un întreg pozitiv impar.

O. N. Ţ.

VII. 566. Într'un sfert de cerc AOBD (obţinut împărţind cercul în patru părţi egale cu ajutorul a doi diametri perpendiculari AA', BB') putem totdeauna să înscriem un dreptunghiu MNPR, vârfurile P, R fiind pe arcul de cerc ADB. Să se studieze variaţia *ariei* şi *perimetrului* dreptunghiului MNPR, când, rămânând înscris în sfertul de cerc, el se deformează.

(Se va lua ca variabilă unghiul ROD).

O. N. Ţ.

VII. 567. Să se descompună în factori determinantul

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \sin(b-c) & \sin(a-c) & \sin(a-b) \\ \cos c - \cos b & \cos c - \cos a & \cos b - \cos a \\ \sin c - \sin b & \sin c - \sin a & \sin b - \sin a \end{vmatrix}.$$

apoi punând: $a=x$, $b=x+r$, $c=x+2r$ să se rezolve ecuația $\Delta = 0$.

C. I. B.

VII. 568. Să se rezolve sistemul

$$x + ay + a^3z + a^4t = a^5$$
$$x + by + b^3z + b^4t = b^5$$
$$x + cy + c^3z + c^4t = c^5.$$

C. I. B.

Clasa VIII-a. *Exerc. 446.* Rădăcinile ecuației

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

fiind: $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{tg}\gamma$ și având relațiile:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \operatorname{tg}(\beta+\gamma) = \operatorname{tg}(\gamma+\alpha) = \operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma),$$

coeficienții ecuației date satisfac relației:

$$p + q(p + r) - 3r = 0.$$

V. Gh.

VIII. 447. Se consideră un cerc și o dreaptă fixe. Fie P unul din punctele de intersecție al unei secante variabile, perpendiculară pe dreapta dată, cu cercul, iar Q intersecția acestei secante cu dreapta dată. Să se găsească și să se construiască locul mijlocului segmentului PQ.

V. Gh.

VIII. 448. AOB fiind un unghiu fix, iar OC o dreaptă fixă, să se arate analiticește că dreapta MN, care are capetele M, N pe laturile unghiului dat, iar mijloacele pe OC, sunt paralele între ele.

V. Gh.

VIII. 449. Să se studieze natura rădăcinilor ecuației:

$$x^6 - 6x^5 + 6x^4 + (\lambda - 12)x^3 + 12x^2 - 24x + 8 = 0,$$

λ fiind un parametru variabil.

H. P. I.

VIII. 450. Normala în A la o parabolă o intersectează a doua oară în B şi este astfel încât segmentul AB este văzut subt un unghiu drept din vârful S al parabolei. Dacă însemnăm cu F focarul parabolei, să se arate că, segmentul cel mai mare dintre $\overline{FA}$, $\overline{FB}$ este triplul celuilalt.

G. G. C.

VIII. 451. Dintr'un punct B, de pe tangenta în A la cercul de centru O, se duce o paralelă la AO, care intersectează cercul în punctele C şi C'. Să se demonstreze, că locul intersecţiei diagonalelor trapezelor OABC şi OABC' este *o elipsă,* tangentă în A cercului O.

G. G. C.

VIII. 452. Pe o dreaptă fixă Δ se consideră un punct fix O şi altul mobil M. Fie N vârful unghiului neegal al triunghiului isoscel ONM în care raza cercului înscris este constantă.

1°. Să se arate, că dreapta MN rămâne tangentă unui cerc fix, al cărui centru şi rază să se determine.

2°. Să se găsească locul centrului cercului exînscris triunghiului OMN, tangent laturei OM.

G. G. C.

VIII. 453. Se dă elipsa raportată la axele ei şi parabola care are vârful în centrul elipsei, iar focarul F comun cu al elipsei.

1. Să se arate, că aceste două curbe se taie subt unghiul α, dat de relaţia:

$$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{a(a+c)}{c(a-c)}}.$$

2. Distanţa de la unul din punctele de intersecţie, M, până la focar este:

$$\overline{MF} = \frac{a^2+c^2}{a+c}.$$

G. D. S.

VIII. 454. Să *se rezolve* ecuaţia:

$$x^3 + ax^2 + 5a^2x + a^3 = 0.$$

V. Gh.

VIII. 455. Se dau punctele

$$A(a, a+b) \quad , \quad B(a-b, a) \quad , \quad M(a+b, x).$$

1. Să se determine x astfel ca punctele să fie colineare.
2. Să se găsească raportul în care M împarte segmentul BA.
3. Să se scrie ecuaţia dreptei AB şi să se afle raportul în care ea împarte segmentul NP.

$$N(a+3b, b+3a) \quad , \quad P(a+2b, a-2b).$$

C. I. B.

Exerciţii Generale. *Exerc. 343.* Să se rezolve, în numere reale, întregi şi pozitive, ecuaţia:

$$2x-3y+(4-5i)^2 z+\left(2-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 u = 25{,}125+(1-\sqrt{3})^3+(10-2i)^2.$$

V. Gh.

E. G. 344. Să se calculeze suma:

$$S = 1+432+103680+\ldots$$

limitată la al n^{lea} termen.

V. Gh.

E. G. 345. Să se găsească un număr de două cifre, $N = \overline{ab}$, astfel încât:

$$\frac{\overline{ab}}{2} = (1^2+2^2+\ldots+a^2)+1.2\ldots b.$$

V. Gh.

E. G. 346. Care este cel mai mare număr de numere prime absolute, care adunate să ne dea 1941 ?

I. L.

E. G. 347. Să se găsească: numărul, suma şi produsul divizorilor numărului 1941^2.

I. L.

E. G. 348. Să se calculeze valoarea expresiei

$$E = S[\sigma(1941)]$$

unde $S(I)$ şi $\sigma(I)$ reprezintă respectiv suma divizorilor şi suma numerelor prime mai mici ca I.

I. L.

E. G. 349. Să se calculeze valoarea expresiei :

$$E = S[\varphi[S[\varphi(1941)]]]$$

unde $S(I)$ este suma divizorilor lui I şi $\varphi(I)$ indicatorul lui I.

I. L.

E. G. 350. In ce caz avem :

$$\varphi[S(2^{\alpha})] > S[\varphi(2^{\alpha})]$$

unde $S(I)$ reprezintă suma divizorilor lui I şi $\varphi(I)$ indicatorul lui I.

I. L.

E. G. 351. Nu există numere de *cinci* cifre de formele *abcba* şi *defed*, aşa ca unul să fie multiplul celuilalt.

GH. B.

E. G. 352. Se cere să se găsească numărul total de soluţii distincte pentru cazul II al exerciţiului *E. G. 303*, a cărui soluţie este publicată la pagina 105 din acest număr.

GH. B.

E. G. 353. Dacă *a, b, c, d, e, f, g* sunt cifre diferite între ele şi diferite de *1* şi *6*, atunci produsul lui *6* cu numărul de opt cifre $1abcdefg$ nu poate fi un număr de *10* cifre diferite între ele.

GH. B.

E. G. 354. Să se arate că expresia

$$E = 6n^{11} - 55n^9 + 198n^7 - 330n^5 + 231n^3 - 50n$$

este divizibilă cu *660*, *n* fiind număr întreg pozitiv.

C. I. Ţ.

E. G. 355. Să se arate că expresia

$$E = n(2n^4 - 15n^3 + 42n^2 - 50n + 21)$$

este divizibilă cu *180*, *n* fiind un patrat perfect.

C. I. Ţ.

INSTRUCȚIUNI

a) Soluțiile exercițiilor se vor scrie cu cerneală, pe sferturi de coală și numai pe o parte a foii.

Dacă va fi nevoie de mai multe foi pentru soluționarea unui exercițiu, ele se vor coase sau lipi în partea stângă. Figurile, ce vor fi necesare pentru urmărirea exercițiului se vor construi îngrijit, pe foi aparte, având formatul arătat mai sus și se vor coase sau lipi odată cu soluția.

Nu se vor trimite soluțiile mai multor exerciții pe aceeași foaie.

b) Redactarea soluțiilor se va face astfel:

Sus, se va scrie numărul exercițiului, dedesubt enunțul astfel cum e publicat în revistă, cu inițialele propunătorului, apoi soluția clar compusă, iar la sfârșit, iscălitura rezolvitorului în ordinea următoare:

Numele de botez complet, inițiala părintelui, numele de familie, însoțit de clasa și școala pe care o urmează.

c) Nu se vor lua în considerare soluțiile iscălite de 2 sau mai mulți corespondenți, nici soluțiile exercițiilor propuse la clase inferioare aceleia în care corespondentul se află. Pentru redijarea soluțiilor se pot vedea indicațiile din Nr. 1, Vol. IV.

d) Soluțiile se primesc timp de 3 luni dela propunerea exercițiului, numai dela abonații „Suplimentului cu Exerciții" al Gazetei Matematice, pe adresa Locot. C. D. Ionescu-Țiu, Casa Gazeta Matematică, Calea Griviței 158, București 2.

Drepturile de reproducere rezervate Societății «Gazeta Matematică».

Elevii claselor VI, VII și VIII, cu bogată activitate la această revistă își pot lărgi cadrul activității soluționând probleme din „Gazeta Matematică".

In Biblioteca „Gazetei Matematice" au apărut și se găsesc la adresa indicată mai sus, următoarele:

III. **N. Abramescu,** Lecțiuni elementare de Algebră superioară, pentru clasa VIII-a științifică, Ediția VI-a . . . . . Lei 120

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și G. Țițeica,** Vocabular Matematic . . . . . .Lei 20

X. **G. Țițeica,** Culegere de Probleme de Geometrie . . . .Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. Istoric, învățăminte. Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 200 / pentru abonații G. M. și S. G. M. . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I. (Goniometrie) revăzută și adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** Culegere de Probleme de Aritmetică. Partea I. Aritmetica rațională . . . . . .Lei 190

XIV. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I-a. (Trigonometrie plană). Ediția II-a revăzută și adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

XV. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea I. Ediția IV-a revăzută și mărită . . . . . Lei 120

XVI. **G. Țițeica,** Culegere de Probleme de Geometrie Analitică. Partea I. Ediția II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 140

XVII. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea II-a. Ediția IV-a, revăzută și mărită . . . . . .Lei 240

Biblioteca Istorică a GAZETEI MATEMATICE

1. Elementele lui **Euclid.** (Cărțile I — VI de Geometrie plană) tradusă din limba greacă de *V. Marian* . . . . . .Lei 160

Suplimentul cu Exerciții. Abonamentul anual (9 numere) . . Lei 50

„Gazeta Matematică" apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plătește înainte și începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele și toată corespondența se trimite pe adresa:

Societății „GAZETA MATEMATICĂ"

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviței No. 158. — București 2.

(Telefon: 3-9803).

M. O., IMPRIMERIA NAȚIONALĂ — C. 58 357

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL VII. No. 6 1 MARTIE 1941

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAŢIUNII" SIBIIU

SOCIETATEA GAZETA MATEMATICĂ
CALEA GRIVIŢEI, 158. BUCUREŞTI 2. — TELEFON 3-9803

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL VII. No. 6 — 1 MARTIE 1941

ABONAMENTUL LEI 50 PE AN (9 numere)

Soluţii şi orice corespondenţă pe adresa:

Locot. C. D. IONESCU-ŢIU

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviţei 158. — Bucureşti 2

CONCURSUL „GAZETEI MATEMATICE"

După cum s'a anunţat în numărul 4 din Decemvrie 1940, al *Gazetei Matematice*, anul acesta se va ţine un concurs de matematici între elevii liceelor din ţară şi studenţii anului I al Politechnicei din Bucureşti.

Din cauza evenimentelor care au cerut întreruperi de cursuri şi chiar mutări de şcoli dintr'un oraş într'altul, mulţi corespondenţi nu au avut timpul să se înscrie la concurs.

Din această cauză Societatea *Gazeta Matematică* a decis să se prelungească termenul de înscriere până la 5 Martie inclusiv.

Dăm mai jos lista candidaţilor înscrişi în termen şi admişi la concurs.

Pentru cei noui înscrişi se va face o publicaţie analoagă în N-rul 7 din Aprilie a. c.

Pentru Clasa IV-a: *Ieşan Şt. Alexandru.*

Pentru Clasa V-a: *Mişicu V. Mircea.*

Pentru Clasa VI-a: *Petrescu I. Ştefan, Popa Teodor, Popescu Gh. Marin, Prişcu R. Alexandru.*

Pentru Clasa VII-a: *Ganea M. Marin, Mănescu Gh. Ioan.*

Pentru Clasa VIII-a: *Aldea V. Minea, Bârlea G. Victor, Cruceru Gh. Constantin, Gligor N. Ioan, Mărgărit I. Nicolae, Nicolau Constantin, Niculescu C. Mircea, Petrescu Iulian, Sbârnea D. Gheorghe, Vijelie Gh. Eugen, Voinea P. Radu.*

Pentru anul I al Politechnicei Bucureşti: *Boeangiu D. Dumitru, Costescu Gh. Ion, Papadopol Demetra-Elena, Rusu L. Mircea, Trefilov I. Mihail, Văduva F. Marin.*

Adică 1 candidat pentru clasa IV-a, 1 pentru clasa V-a, 4 pentru clasa VI-a, 2 pentru clasa VII-a, 11 pentru clasa VIII-a, şi 6 pentru anul I al Politechnicei Bucureşti. Fiecare candidat va da câte o lucrare scrisă din ambele materii la care s'a înscris. Lucrările scrise sunt eliminatorii.

Prima lucrare scrisă va avea loc Joi 24 Aprilie 1941 dela ora 8^{30} până la 11^{30}; iar a doua lucrare scrisă în aceeaşi zi, dela ora 15 până la ora 18, la Politechnică, Calea Griviţei 132, Bucureşti.

Oralul va începe Vineri 25 Aprilie, ora 8^{30}, tot în localul Politechnicei. Candidaţilor elevi de liceu înscrişi la concurs, care nu dispun de mijloace materiale pentru venirea şi întreţinerea lor în Bucureşti (după cum au arătat în cererile lor), li se vor trimite în vacanţa de Paşti sumele necesare transportului la Bucureşti şi li se va comunica locul unde vor fi găzduiţi în tot timpul concursului.

Eventualele modificări vor fi la timp comunicate.

DELEGAŢIA SOCIETĂŢII.

EXERCIŢII REZOLVATE

Clasa III-a. *Exerc. 150. Un trapez isoscel are baza mare de 12 cm, baza mică de 8 cm şi laturile neparalele fac un unghiu de 45° pe baza mare.*

1°. *Să se construiască trapezul.*

2°. *Să i se afle perimetrul şi suprafaţa.*

3°. *Cu cât trebue prelungite laturile neparalele până să se întâlnească.*

N. M.

1°. Se ia un segment AB de 12 cm; la capete se construeşte unghiuri de 45°; dintr'un capăt al segmentului, fie A, se ia AE = 8 cm şi se duce o paralelă din E la latura din A, până taie latura din B în C; paralela din C la AB taie pe latura din A, în D. ABCD este trapezul construit.

2°. Fie F proiecția lui C pe AB; în triunghiul dreptunghic isoscel BCF, $BF = (12 - 8) : 2 = 2$; deci $CF = 2$ și $BC = 2 \times \sqrt{2} = 2{,}82$ cm; perimetrul este $12 + 8 + 2 \times 2{,}82 = 25{,}64$; suprafața este 20 cm².

3°. Fie I întâlnirea laturilor și G proiecția lui I pe DC; DIG este un triunghiu dreptunghic isoscel; DG = 4 cm; IG = 4 cm; $DI = 4 \times \sqrt{2} = 5{,}64$.

III. 151. Care e capitalul din care s'a depus $\frac{3}{5}$ *cu* 3% *și* $\frac{2}{7}$ *cu* 7% *și după 5 ani s'a strâns dobânda de 1900 lei?*

N. M.

Raționăm prin falsă poziție; alegem un capital oarecare divizibil prin 5 și 7; ex. 3500 lei; $\frac{3}{5}$ din el face 2100 care cu 3% pe 5 ani aduce dobânda

$$\frac{2100 \times 3 \times 5}{100} = 63 \times 5 = 315$$

iar capitalul $\frac{2}{7}$ din $3500 = 1000$, aduce dobânda

$$\frac{1000 \times 7 \times 5}{100} = 70 \times 5 = 350.$$

Dacă dobânda de ($315 + 350 = 665$ lei) provine dela capitalul 3500 lei, dar dobânda 1900 lei, dela ce capital provine? O regulă de trei dă capitalul

$$\frac{1900 \times 3500}{665} = 10000.$$

Capitalul e de 10000 lei.

Clasa IV-a. *Exerc. 525. Se dau două plane paralele* P *și* Q *și punctele* A, B *în planul* P *și* C, D *în planul* Q. *Dreptele* AC, BC, BD, AD *sunt întâlnite în punctele* E, F, G, H *de un plan* R *paralel cu* P *și* Q *și la egală depărtare de ele.*

1°. *Să se arate că figura* EFGH *este un paralelogram. In ce cazuri devine romb, dreptunghiu, patrat?*

2°. *Ce se întâmplă cu paralelogramul* EFGH, *când segmentele* $\overline{AB}$ *şi* $\overline{CD}$, *rămânând în planele respective, capătă mişcări de translaţie?*

G. D. S.

1°. Planul ABC este tăiat de planele *paralele* P, R după două drepte paralele: AB şi EF. La fel se arată că GH ∥ AB. Deci EF ∥ GH.

Planele CDA şi CDB tăiate de planele paralele Q, R ne dau:

$$EG \parallel CD \text{ şi } FH \parallel CD, \text{ deci } EG \parallel FH.$$

Figura EFHG este paralelogram. Planul R fiind egal depărtat de P şi Q rezultă că E, F, H, G sunt mijloacele segmentelor

$$\overline{AC}, \overline{BC}, \overline{BD}, \overline{AD} \text{ deci } \overline{EF} = \overline{HG} = \frac{\overline{AB}}{2} \text{ şi } \overline{FH} = \overline{EG} = \frac{\overline{CD}}{2}.$$

De aci: *a)* condiţia ca figura să fie romb este ca $\overline{AB} = \overline{CD}$; *b)* pentru a fi dreptunghiu trebue ca AB şi CD să fie perpendiculare; *c)* pentru a fi patrat trebuesc îndeplinite ambele condiţiuni dela *a)* şi *b)*.

2°. Dacă $\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$ capătă mişcări de translaţie, paralelogramul EFGH capătă şi el mişcare de translaţie, deci rămâne *egal* cu el însuşi, laturile deplasându-se paralel cu ele însile.

Clasa V-a. *Exerc. 630. Dacă* A_1, A_2, A_3, ... *sunt picioarele oblicelor duse din* M *de aceeaşi parte a perpendicularei* MA *pe o direcţie dată* Δ *şi astfel încât diferenţa* $MA_n - MA_{n-1}$ *să fie constantă, atunci segmentele* $A_{n-1}A_n$ *descresc neîncetat.*

G. G. C.

Soluţie. Avem

$$MA_n - MA_{n-1} = MA_{n+1} - MA_n$$

deci

$$2\,MA_n = MA_{n-1} + MA_{n+1}.$$

Fie O intersecția diagonalelor paralelogramului $MA_{n-1}\,NA_{n+1}$, avem

$$MN < MA_{n+1} + A_{n+1}\,N$$

sau

$$2\,MO < MA_{n+1} + MA_{n-1}$$

rezultând $MO < MA_n$ ceea ce arată că O este totdeauna între A_{n-1} și A_n și cum O e mijlocul lui $A_{n-1}\,A_{n+1}$ proprietatea e demonstrată.

Clasa VI-a. *Exerc. 617. Se dau trei plane paralele* P, Q, R *și punctele* A, B *în planul* P *și* C, D *în planul* Q. *Dreptele* AC, BC, BD, AD *întâlnesc planul* R *în punctele* E, F, G, H.

1°. *Să se arate că figura* EFGH *este un paralelogram. In ce cazuri devine romb, dreptunghiu, patrat?*

2°. *Ce se întâmplă cu paralelogramul* EFGH, *când segmentele* $\overline{AB}$ *și* $\overline{CD}$, *rămânând în planele respective, capătă mișcări de translație?*

G. D. S.

1°. Planele ABC și ABD tăiate de planele paralele P, R ne dau

$$EF \parallel AB \;;\; GH \parallel AB \quad \text{deci} \quad EF \parallel GH.$$

Planele CDA și CDB tăiate de Q, R ne dau:

$$EH \parallel CD \parallel FG.$$

Figura EFGH este deci paralelogram.

a) Pentru a fi dreptunghiu e de ajuns ca unghiurile să fie drepte deci ca AB și CD să fie perpendiculare.

b) Să găsim condiția ca să fie romb. Vom nota cu K raportul distanțelor dela planul R la P și Q. Avem din asemănări de triunghiuri:

$$\overline{EF} = \frac{\overline{CF} \times \overline{AB}}{\overline{CB}} \quad \text{și} \quad \overline{FG} = \frac{\overline{BF} \times \overline{CD}}{\overline{BC}}.$$

Ca figura să fie romb trebue ca $\overline{EF} = \overline{FG}$ deci

$$\overline{CF} \times \overline{AB} = \overline{BF} \times \overline{CD} \quad \text{sau} \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{FB}}{\overline{FC}} = k.$$

In cazul $k = 1$ exercițiul dela cl. IV.

c) Pentru a fi patrat trebuesc îndeplinite ambele condițiuni dela *a)* și *b)*.

2°. Paralelogramul EFGH capătă și el o mișcare de translație în planul R, deci rămâne *egal* și *paralel* cu el însuși.

Clasa VII-a. *Exerc. 533. Să se determine m, n, p aşa fel încât în desvoltarea lui*

$$\left(x^m + \frac{1}{x^p}\right)^n$$

termenii de rangul 12 şi 24 să aibă pe x respectiv la puterile 1 şi 5 şi să avem şi un termen liber.

H. P. I.

Din desvoltare avem

$$nm - (m+p)\,i = 0$$
$$nm - 11\,(m+p) = 1$$
$$nm - 23\,(m+p) = 5$$

scăzând pe prima din celelalte şi împărţind apoi rezultatele avem:

$$\frac{i-11}{i-23} = \frac{1}{5} \quad \therefore \quad i = 8$$

apoi

$$m+p = -\frac{1}{3} \qquad n = -\frac{8}{3m},$$

însă n trebue să fie întreg pozitiv deci

$$m = -\frac{1}{3\mu}, \ \mu \text{ fiind întreg} \quad \therefore \quad n = 8\mu; \text{ etc.}$$

VII. 534. Să se găsească coeficientul lui x^{14} din desvoltarea:

$$(x^4 - 3x + 1)^8.$$

G. D. S.

Vom scrie expresia dată sub forma:

$$[x^4 - (3x - 1)]^8 = (a - b)^8 = a^8 - C_8^1 a^7 b + \ldots$$

unde $a = x^4$, iar $b = 3x - 1$.

Observăm că termenii în care a are un exponent $\geqslant 4$ nu pot conţine pe x^{14} deoarece $a^4 = x^{16}$.

Atunci din toată desvoltarea nu ne interesează decât termenii:

$$-C_8^5 a^3 b^5 + C_8^6 a^2 b^6 - C_8^7 ab^7 + C_8^8 b^8$$

însă ultimii doi termeni au pe x la o putere $\leqslant 11$ căci $ab^7 = x^4 (3x-1)^7$, iar $b^8 = (3x-1)^8$. Deci x^{14} nu poate exista decât în termenii:

$$-C_8^5 x^{12} (3x-1)^5 + C_8^2 x^8 (3x-1)^6$$

sau:

$$-C_8^5 x^{12} (3^5 x^5 - C_5^1 3^4 x^4 + C_5^2 3^3 x^3 - C_5^3 3^2 x^2 + \ldots)$$
$$+ C_8^2 x^8 (3^6 x^6 - C_6^1 3^5 x^5 + \ldots).$$

Deci coeficientul lui x^{14} este:

$$C_8^5 . C_5^3 . 3^2 + C_8^2 . 3^6 = 5040 + 20.412 = 25.452.$$

Clasa VIII-a. *Exerc. 418. Dacă* $a+b+c=0$ *să se arate că avem relaţiunile*

$$\frac{a^5+b^5+c^5}{5} = \frac{a^3+b^3+c^3}{3} \cdot \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

$$\frac{a^7+b^7+c^7}{7} = \frac{a^5+b^5+c^5}{5} \cdot \frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

G. G. C.

Privind pe a, b, c drept rădăcinile ecuaţiei

$$x^3 + px + q = 0$$

şi notând simbolic $S_n = a^n + b^n + c^n$, avem

$$S_3 + 3q = 0 \qquad S_2 + 2p = 0$$

şi

$$S_5 + pS_3 + qS_2 = 0$$

între care eliminând parametrii p şi q obţinem prima relaţiune a enunţului.

Pentru a doua relație, observăm că

$$S_4 + pS_2 = 0$$

și deci relația

$$S_7 + pS_5 + qS_4 = 0$$

se scrie

$$S_7 = -p(S_5 - qS_2)$$

în care introducând valorile parametrilor p, q și ținând seamă de prima relație, obținem

$$\frac{S_7}{7} = \frac{S_2}{2} \cdot \frac{S_5}{5}$$

adică a doua relație a enunțului, care se poate demonstra și direct, însă mai puțin elegant.

VIII. 424. Să se rezolve ecuația :

$$\cos 2x + \cos x + \cos^2 x + \cos^3 x = 0.$$

G. D. S.

Metoda I. Să punem $\cos x = y$. Deoarece $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, ecuația devine :

$$y^3 + 3y^2 + y - 1 = 0$$

care se vede că admite rădăcina $y_1 = -1$.

Împărțind cu $(y + 1)$ obținem :

$$y^2 + 2y - 1 = 0 \quad \therefore \quad y_{2,3} = -1 \pm \sqrt{2}.$$

Convin numai soluțiile :

a) $\cos x = -1$ și *b)* $\cos x = -1 + \sqrt{2}$

care ne dau arcele :

a) $x = (2k + 1)\, 180^0$ *b)* $x = k \cdot 360^0 \pm 65^0\, 31'\, 51''$.

Metoda II. Avem $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, deci ecuația devine

(1) $\qquad 1 + \cos x + \cos^2 x + \cos^3 x = 2\sin^2 x.$

Prima parte e o progresie geometrică ce are drept sumă:

$$\frac{1-\cos^4 x}{1-\cos x} = \frac{(1+\cos^2 x)\sin^2 x}{1-\cos x} = \frac{4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}(1+\cos^2 x)}{2\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$= 2(1+\cos^2 x)\cos^2\frac{x}{2}.$$

Ecuația (1) se poate scrie:

$$2(1+\cos^2 x)\cos^2\frac{x}{2} = 8\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}$$

care se desface în:

$$\cos\frac{x}{2} = 0 \quad \text{și} \quad \cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0$$

și ne dă aceleași arce ca la prima soluție.

G. D. S.

Până la 10 Februarie s'au primit soluțiuni bune pentru exercițiile publicate în numerele 3, 4, 5 anul VII, dela[1]):

Școala Centrală, București.

Clasa VI-a: Ottone P. Clelia (VI: 612, 20, 31).
Clasa VII-a: Agapie G. Elena (VII: 546), Timotin A. Silvia (VII: 559).

Liceul „Carmen-Sylva", București.

Clasa III-a: Kogălniceanu M. Olga (III: 151).
Clasa V-a: Damian C. Lucia (V: 612), Mateescu C. Virginia (V: 636*).
Clasa VI-a: Damian C. Cornelia (VI: 598), Epure C. Marilena (VI: 620), Vasilescu I. Maria (VI: 598).
Clasa VII-a: Davidoglu A. Mira (VII: 529, 30*, VIII: 418).
Clasa VIII-a: Crașoveanu Lucia (VIII: 428).

Liceul „Regina Maria", București.

Clasa V-a: Stănescu I. Maria (V: 612, 3, 4, 6, 8, 20).

---

1) Semnul * însoțește numărul unui exercițiu rezolvat foarte bine.

Institutul „Sf. Maria", Bucureşti.

Clasa V-a: Odobeştianu R. Francette (V: 631).
Clasa VII-a: Porumbeanu P. Sanda (VII: 537).

Liceul „Iulia Haşdeu", Bucureşti.

Clasa VII-a: Stoia N. Silvia (VII: 539).

Liceul „Oltea Doamna", Iaşi.

Clasa III-a: Costeţchi M. A. (III: 151, 7).
Clasa VII-a: Ionescu C. Elena (VII: 535).

Liceul „Despina Doamna", Ploeşti.

Clasa V-a: Boca C. Stelica (V: 636, 8*).

Liceul „Gh. Lazăr", Bucureşti.

Clasa V-a: Timotin A. A. (V: 628).
Clasa VI-a: Prişcu R. A. (VI: 601, 17, E. G.: 313).
Clasa VII-a: Ghimuş D. (VII: 522, 39), Iliescu-Brânceni C. (VII: 538, 46), Prişcu R. R. (VII: 535).

Colegiul Naţional „Sf. Sava", Bucureşti.

Clasa IV-a: Ionescu N. G. (IV: 521).
Clasa V-a: Bâlcu N. (V: 622, 4*), Horbuniev P. V. (V: 622, 4*, 46, E. G.: 315), Mişicu V. M. (V: 623, 5, 35, 8, 46).
Clasa VI-a: Angheleanu S. P. (VI: 599), Petrescu S. (VI: 603), Stoika V. V. (VI: 620).
Clasa VII-a: Andonie St. I. (VII: 546, 9, 59), Botez V. R. (VII: 530), Nadolu C. G. (VII: 535, 7), Sclavu D. (VII: 535).

Liceul „Titu Maiorescu", Bucureşti.

Clasa II-a: Seni G. D. (III: 151).
Clasa V-a: Niculescu G. N. (E. G: 315).
Clasa VII-a: Ilinschi A. C. (VII: 538, 9), Lupu N. A. (VII: 539), Marinescu V. (VII: 530, 4, 6, E. G.: 315), Seni C. (VII: 559, E. G.: 314, 36*, 7).
Clasa VIII-a: Niculescu C. M. (VIII: 415, 27).

Liceul „Mihai Viteazul", Bucureşti.

Clasa V-a: Ionescu G. I. (V: 636, 8*, 46), Vernescu V. M. (V: 640).
Clasa VII-a: Hiticeanu I. (VII: 522).
Clasa VIII-a: Ştefănescu S. D. (VIII: 442, 3, 5), Vernescu V. P. (VIII: 419*, 42, 3, E. G.: 313).

Liceul „Aurel Vlaicu", Bucureşti.

Clasa VII-a: Calmuschi G. I. (VII: 538, 46).
Clasa VIII-a: Barbaiani A. I. (VIII: 412, 5, 8, 20, 2, 3*, 4, E. G.: 313, 5, 6), Buga I. M. (VIII: 412, 5, 8, 9*, 20*, 4, E. G.: 313, 5, 6), Davidescu M. A. (VIII: 418, 9, 22, 3).

Liceul „Marele Voevod Mihai", Bucureşti.

Clasa VIII-a: POPESCU S. F. (VIII: 418*, 9, 21, 2, 3, 4, 6, 42, 3, 4, 5), STELIAN IORDACHE (VIII: 422, 32, 42, 3).

Liceul „Spiru Haret", Bucureşti.

Clasa VIII-a: GEORGIAN R. P. (VIII: 442, 3, 4), NEGRESGU C. I. (VIII: 423, 32, 42, 3, 4, 5).

Liceul „Cantemir Vodă", Bucureşti.

Clasa IV-a: FINŢESCU D. (IV: 521, 2, 3, 8).

Liceul „Gh. Şincai", Bucureşti.

Clasa VI-a: CONSTANTINESCU I. E. (VI: 598, 9, 608, 17*, E. G.: 613, 5, 6).
Clasa VIII-a: ANGHEL TUDOR (VIII: 418, 9, 20, 1, 2, 3, 4, 7), CUTĂR D. C. (VIII: 499, 20, 2, 4).

Liceul „M. Eminescu", Bucureşti.

Clasa VI-a: ARON I. G. (VI: 618, VII: 542).

Institutul „Schewitz Thierrin", Bucureşti.

Clasa VI-a: VĂLEANU I. G. (VI: 608).
Clasa VIII-a: MĂRGĂRIT I. N. (VIII: 419).

Liceul „Moise Nicoară", Arad.

Clasa VI-a: NISTOR I. I. (VIII: 421, E. G.: 313, 5), POPA T. T. (VI: 613, 21).
Clasa VIII-a: GLIGOR N. I. (VIII: 443, 4, 5),

Liceul „Dr. Ion Meşotă", Braşov.

Clasa III-a: VELTER A. M. (III: 152).
Clasa IV-a: ALEXANDRESCU N. M. (IV: 521), IONESCU E. (IV: 522*, 30).
Clasa V-a; CĂTĂNOIU I. N. (V: 612), DUMITRAŞCU O. (V: 636*, 8*, 46*), NISTOR V. H. (V: 637, E. G.: 316), OUATU G. I. (V: 636, 7, 8*, 46).
Clasa VI-a: GEORGESCU M. (VI: 623).
Clasa VIII-a: CRISTEA S. L. (VIII: 418, 9, 20, 2, E. G.: 313, 5, 6).

Liceul „Avram Iancu", Brad.

Clasa V-a: DAVID R. (V: 612).

Liceul „Sft. Vasile", Blaj.

Clasa III-a: JANZA V. (III: 149, 51, 3).

Liceul Internat, Buftea.

Clasa VIII-a: GRIGORIU A. (VIII: 442, 4).

Liceul „B. P. Haşdeu", Buzău.

Clasa VIII-a: ALDEA V. MINEA (VIII: 412).

Liceul „ Barbu Ştirbey", Câmpina.

Clasa VII-a: TUDOSE C. I. (VII: 536*).

Liceul militar, Câmpulung-Muscel.

Clasa V-a : Cândea N. S. (V : 647), Cimbru V. M. (V : 636, 7), Iliescu R. (V : 638), Staicu C. (V : 612, 38, 46, VIII : 418).

Clasa VII-a : Bărbuț I. T. (VII : 530, 5, 6, 44, VIII : 418), Topârceanu G. (VII : 534, 5, 6*, VIII : 418).

Liceul „Ioniță Assan", Caracal.

Clasa VII-a : Musceleanu D. (VII : 530, 6, VIII : 418, 24, E. G. : 313, 5, 6), Musceleanu V. (VII : 530, 8, 42, VIII : 418, 24).

Liceul „Știrbei Vodă", Călărași.

Clasa VIII-a : Ionescu N. V. (E. G. : 336), Nițoiu I. G. (E. G. : 336).

Liceul „Mircea cel Bătrân", Constanța.

Clasa V-a : Pambuccian A. (V : 612, 22, 4, 8*).

Clasa VII-a : Sotiriu T. (VII : 539, 43).

Liceul militar „Regele Ferdinand", Craiova.

Clasa VII-a : Cristea C. (E. G. : 315, 6).

Clasa VIII-a : Moldoveanu N. D. (VIII : 424).

Colegiul Național „Carol I", Craiova.

Clasa VI-a : Ionescu F. P. (VI : 600).

Liceul Militar „D. A. Sturdza", Craiova.

Clasa VII-a : Antonescu D. I. (VII : 534), Bălănescu M. (VII : 543), Bărbuceanu V. V. (VII : 534), Constantinescu D. Ion (VII : 534), Diaconu D. Aurel (VII : 534), Dinculescu N. Aurel (VII : 534), Grabowski V. Richard (VII : 534), Iliescu Dan Radu (VII : 534), Iliescu G. T. (E. G. : 315), Mateescu Aurel (VII : 537, 9, 43), Morait Roman (VII : 534), Movanu I. Petre (VII : 534), Nicolae M. (VII : 543), Pașoi N. D-tru (VII : 534, 43), Popa D. Eugeniu (VII : 534), Popescu D. Victor (VII : 534), Savin Ioan Romeo (VII : 534), Șerban M. P. (VII : 543), Vâlceanu R. (VII : 543), Zaharia Gh. Simion (VII : 534).

Clasa VIII-a : Balaban C. A. (VIII : 428), Coșa I. Al. (VIII : 419, 21, 8, E. G. : 313), Constantinescu I. Stelian (E. G. : 315), Fulga I. (VIII : 428), Ioniță G. (VIII : 428), Ionescu D. Grigore (E. G. : 313), Iordache N. S. (VIII : 428), Munteanu N. Florin (E. G. : 315), Negoșanu Valeriu (VIII : 421, 8, E. G. : 313), Ovacincu Z. P. (VIII : 421), Popescu P. Aristotel (VIII : 421, 8, E. G. : 313), Popescu I. N. (E. G. : 313), Rădulescu V. M. (VIII : 421, E. G. : 313, 36*), Sitaru S. Costin (VIII : 443) : Stanciu M. (VIII : 428), Ștefănescu A. (VIII : 428), Tatomir D. (E. G. : 313), Velea I. N. (VIII : 421, 8).

Liceul militar, Iași.

Clasa III-a : Bârzescu Mircea (III : 142), Ciortoloman Stelian (III : 142), Ciumașu V. (III : 142, 51, 2), Ciureanu Gh. C. (III : 142), Dimitriu N. (III : 142, E. G. : 332), Dumitrescu George (III : 142, 52), Lupu M. (III : 142), Marinescu N. Gh. (III : 142), Nache D. (III : 142), Radu M. C. (III : 142, 51), Stan Gh. C. (III : 142).

Clasa IV-a: Bejan G. (IV: 510, 2), Coşniţă I. Florin (IV: 523), Dimitriu I. (IV: 513), Edu C. Eugen (IV: 530), Golianu Doru (IV: 530), Ignat M. (IV: 513), Mihăilescu A. Ştefan (IV: 530), Matei N. F. (IV: 513), Roşu A. N. (IV: 510, 23, 30), Vasilescu I. Ioan (IV: 530).

Clasa V-a: Baciu D. (V: 612), Bosinceanu C. C. (E. G.: 315), Capverde V. (V: 612), Cecola Şt. Ioan (VIII: 418), Florea Th. Gh. (VIII: 418), Nocu D. Mihai (VIII: 418), Popa N. N. (E. G.: 315), Puiu I. Virgil (VIII: 418), Turculeţ D. Tiberiu (VIII: 418, E. G.: 313), Văideanu M. G. (VIII: 418), Zaharia Mihai (VIII: 418).

Clasa VII-a: Bogdan G. (VII: 538), Drăghicescu P. P. (VII: 543), Eliade V. (VII: 544), Oslobeanu I. Milu (VIII: 418), Stamate A. (VII: 544), Zamfir C. Ivan (VIII: 418).

Clasa VIII-a: Popa A. (VIII: 415).

Liceul „Aurel Vlaicu", Orăştie.

Clasa VIII-a: German Z. Eugeniu (VIII: 418).

Liceul „Sf. Petru şi Pavel", Ploeşti.

Clasa IV-a: Buzatu D. C. (IV: 510, 20, 2*, 3).

Clasa V-a: Jupcianu N. N. (V: 612, 20), Vintilescu G. (V: 612, 3, 25, 36*, 8*, 46*).

Clasa VI-a: Cătuneanu T. (VI: 612), Moţoiu Şt. C. (VI: 599, 603, 12).

Elev Particular, Ploeşti.

Clasa VII-a: Bereanu B. (VII: 522, 34, 7, VIII: 524).

Colegiul Naţional „N. Filipescu", Predeal.

Clasa VIII-a: Bârlea-Suhăţeanu V. (VIII: 424, 42, 3, 4, 5).

Liceul „Al. Lahovary", Râmnicul-Vâlcea.

Clasa VII-a: Andreescu G. I. (VII: 534, 5, 6*, 7, VIII: 421, E. G.: 313, 5, 6), Boerescu D. D. (VII: 535. 6, E. G.: 315, 6).

Liceul militar, Timişoara.

Clasa III-a: Iordănescu V. (III: 158).

Clasa V-a: Vasiliu G. D. (V: 636*, VI: 615, 21, 2*, 39, VII: 535*, VIII: 418, E. G.: 315).

Clasa VII-a: Baranga G. (VII: 536).

Clasa VIII-a: Costin A. (VIII: 443).

Liceul „C. Diaconovici Loga", Timişoara.

Clasa VIII-a; Bakonyi C. (VIII: 434, 42, 3, 4, 5), Russu G. (VIII: 422, 32).

Liceul „Traian", Turnu-Severin.

Clasa V-a: Dumitrescu G. T. (V: 612).
Clasa VII-a: Corâci I. C. (VII: 535), Mihăescu I. C. (VII: 535, 6*).
Clasa VIII-a: Bengulescu A. C. (VIII: 412, 5, 44), Cruceru G. C. (E. G.: 313, 5, 6), George Mihail (VIII: 412, 5).

Liceul „Tudor Vladimirescu", Târgu-Jiu.

Clasa VII: Dănău C. (VII: 522, 3, 35, 6, 8).

EXERCIȚII PROPUSE

Soluțiile exercițiilor propuse în acest număr se primesc până la 1 Iunie 1941

Clasa III-a. *Exerc. 163.* Se dă un cerc cu centrul în punctul O și de rază R. Dintr'un punct A exterior la distanța $\overline{OA} = d$ să se ducă o tangentă AT și o secantă AMN de aceeași parte a punctului O, astfel ca aria triunghiului AOT să fie egală cu aria triunghiului ATN.

C. I. Ț.

III. 164. Fie S_1 aria dintre un cerc și patratul circumscris și S_2 aria dintre același cerc și patratul înscris. Dacă S_2 este mai mare decât S_1 cu 2,52 cm^2, să se afle raza cercului.

N. M.

III. 165. Cineva a depus o sumă de bani în două rate, la dobândă; prima parte în Septembrie 1935 cu 8% și a doua parte, care este $^3/_4$ din prima, în Septembrie 1937 cu 6%. Care a fost depunerea dacă în Septembrie 1940 a ridicat cu totul 2.742.000 lei?

N. M.

III. 166. Fie trapezul ABCD (BC ∥ AD) și O punctul de întâlnire al diagonalelor AC, BD. Fie M', M'', M''', M'''' punctele așezate pe OA, OB, OC, OD astfel că:

$$\frac{\overline{OM'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OM''}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OM'''}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OM''''}}{OD} = \frac{1}{2}.$$

Paralelele duse prin M', M'', M''', M'''' respectiv la una din cele două diagonale determină paralelogramul A'B'C'D'.

1°. Să se arate că una din diagonalele paralelogramului obținut este paralelă cu bazele trapezului dat.

2°. Să se determine raportul ariilor paralelogramului obținut și trapezului dat.

3°. Laturile neparalele ale trapezului M'M''M'''M'''' se întâlnesc pe a doua diagonală a paralelogramului obținut.

O. N. Ț.

III. 167. Intr'un cerc O de rază R se construește $\overline{AB}$ latura patratului înscris în cercul O. In punctul M al laturei AB se ridică perpendiculara MN care taie razele OA și OB respectiv în punctele N și P.

Știind că $\overline{NP}$ este egal cu jumătatea razei cercului O, să se determine poziția punctului M pe coarda $\overline{AB}$.

Să se calculeze apoi:

1°. Distanța centrelor cercurilor AMN și BMP;

2°. Diferența distanțelor coardei comune $\overline{MM'}$ a cercurilor AMN și BNP la centrele acestor cercuri;

3°. Distanțele coardei comune $\overline{MM'}$ la centrele cercurilor AMN, BNP;

4°. Lungimea coardei comune $\overline{MM'}$, în cazul când raza R = 1 dm.

O. N. Ț.

Clasa IV-a. *Exerc. 560.* Să se arate că

$$\left(\frac{x+a}{x-b}-\frac{x-a}{x+b}\right)\left(\frac{ab}{x(a+b)}-\frac{b}{x}+\frac{x}{a+b}\right)=2.$$

N. M.

IV. 561. Să se rezolve ecuația

$$\frac{x-2}{3}-\frac{x-3}{4}=\frac{2x+1}{6}-\frac{3x+1}{12}.$$

N. M.

IV. 562. Intr'un cerc O de rază R se construeşte coarda AB egală cu latura patratului înscris în cercul O. In punctul M al laturei AB se ridică perpendiculara MN care taie razele OA şi OB în punctele N şi P. Ştiind că segmentul $\overline{NP}$ are o lungime dată $2a$, să se determine poziţia punctului M pe coarda AB. Să se calculeze apoi *distanţa centrelor cercurilor* AMN, BMP şi *lungimea coardei lor comune.*

Aplicaţie: $R = 2$; $a = 1$.

O. N. Ţ.

IV. 563. Fie SABC o piramidă triunghiulară şi A'B'C' o secţie paralelă cu baza ABC; fie $A_1B_1C_1$ proiecţia secţiei A'B'C' pe planul bazei ABC şi A", B", C" mijloacele muchiilor $\overline{A'A}$, $\overline{B'B}$, $\overline{C'C}$.

Să se arate:

1°. Că $A''A_1$, $B''B_1$, $C''C_1$ se întâlnesc într'un punct S_1;

2°. Că secţia făcută prin planul A'B'C' în piramida $S_1A_1B_1C_1$ este egală cu baza ABC a piramidei date.

O. N. Ţ.

IV 564. Fie o piramidă SABC şi o secţie dată A'B'C' paralelă cu baza ABC şi astfel ca $\overline{SA'}/\overline{SA} = k'$; fie A", B", C" punctele care împart respectiv segmentele $\overline{A'A}$, $\overline{B'B}$, $\overline{C'C}$ în raportul k''; $A_1B_1C_1$ proiecţia pe planul ABC paralel cu o direcţie oarecare Δ dată (neparalelă cu ABC).

1°. Să se calculeze raportul de asemănare al triunghiurilor A"B"C" şi A'B'C';

2°. Să se arate că dreptele $A''A_1$, $B''B_1$, $C''C_1$ sunt concurente în acelaşi punct S_1;

3°. Să se compare secţia făcută prin planul A'B'C' în piramida $S_1A_1B_1C_1$ cu baza ABC a piramidei date.

O. N. Ţ.

IV. 565. Fie piramida SABC în care muchia SA este înălţime; E şi F proiecţiile vârfului A pe muchiile SB şi SC. Să se arate, că punctele B, C, F, E sunt pe un cerc.

O. N. Ţ.

IV. 566. Să considerăm piramida SABC având muchiile laterale egale:

$$\overline{SA} = \overline{SB} = \overline{SC}.$$

Ştiind că înălţimea $\overline{SO} = h$ şi că $\overline{AB} = a^2 - b^2$; $\overline{BC} = 2ab$; $\overline{CA} = a^2 - b^2$ (unde a, b, h sunt trei numere oarecare), să se calculeze *volumul* şi *aria totală* a piramidei SABC.

O. N. Ţ.

IV. 567. Să considerăm piramida SABC la care am măsurat toate muchiile:

$$\overline{SA} = l_a \; ; \; \overline{SB} = l_b \; ; \; \overline{SC} = l_c \; ; \; \overline{BC} = a \; ; \; \overline{CA} = b \; ; \; \overline{AB} = c.$$

Fie h măsura înălţimii $\overline{SO}$, dusă din vârful S pe faţa ABC. Proiectând piciorul O al înălţimii SO pe muchiile SA, SB, SC, obţinem o nouă piramidă SA'B'C'.

Să se calculeze lungimile muchiilor piramidei SA'B'C'.

O. N. Ţ.

IV. 568. Să considerăm o piramidă oarecare SABC şi în ea o secţie paralelă cu baza, fie A'B'C'.

Fie O centrul cercului circumscris bazei ABC şi O' punctul unde SO înţeapă secţiunea A'B'C'.

Să se arate, că punctul obţinut O' este centrul cercului circumscris triunghiului A'B'C'.

Să se demonstreze apoi reciproca proprietăţii de mai sus.

Să se deducă apoi, că dacă dreapta care uneşte centrele celor două triunghiuri de bază la un trunchiu de piramidă este perpendiculară pe una din baze, muchiile laterale ale trunchiului sunt egale.

O. N. Ţ.

IV. 569. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{aligned} 457x + 359y &= 1 \\ 1471x + 1077y &= 3. \end{aligned}$$

O. N. Ţ.

Clasa V-a. *Exerc. 665.* Să se rezolve ecuaţiile:

$$\frac{1}{\sqrt{2x}} \pm \frac{1-x}{\sqrt{2x - x^2}} = 0.$$

Gh. B.

V. 666. In triunghiul ABC, înscris în cercul O, raza OA şi înălţimea CC' se taie în M. Să se demonstreze, că cercul AMC este tangent în C laturei BC.

Gh. B.

V. 667. Dacă ecuaţia

$$9a^2x^2 + 2a(8 - 3a^2)x + a^4 = 0$$

are rădăcinile reale, atunci acele rădăcini sunt de semn contrar cu semnul lui a.

GH. B.

V. 668. Să se rezolve ecuaţia

$$(x + a + b)(x + b + c) = (x + c + d)(x + d + a).$$

N. M.

V. 669. Să se rezolve sistemul

$$x(b + 1) + y(a + 1) = (a + b)(ab - 1)$$
$$b(x - 1) - a(y - 1) = (1 + a)(1 + b)(a - b).$$

N. M.

V. 670. Fie D, E, F punctele de contact ale cercului înscris în triunghiul ABC şi B_a, C_a punctele unde dreptele DE şi DF intersectează cercul AEF. Să se arate că dreapta $B_a C_a$ trece prin mijloacele laturilor AC şi AB.

O. G. R.

V. 671. Fie A'B'C' triunghiul ortic al triunghiului ABC. Dacă $\sphericalangle A = 45^0$, să se arate că B'C' este egal cu raza cercului circumscris triunghiului ABC.

O. G. R.

V. 672. Fie E şi F respectiv punctele de întâlnire ale perechilor de laturi (AB, CD) şi (BC, AD) ale unui patrulater oarecare. Să se dovedească relaţia

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{ED}} \cdot \frac{\overline{AD}}{\overline{AF}}.$$

O. G. R.

V. 673. Să se găsească direct *raportul* în care dreapta BB', care în triunghiul ABC trece prin mijlocul medianei AA', împarte latura AC.

O. G. R.

V. 674. Să se rezolve inecuţia în x

$$\frac{mx^2 - (2m - 1)x + m + 2}{3x + m} < 0$$

m fiind un parametru ce variază dela $-\infty$, la $+\infty$.

C. I. B.

Clasa VI-a. *Exerc. 650.* Să se arate că

$$\cos^2 x\,(1-\operatorname{tg}^2 x) = 1-2\sin^2 x \quad ; \quad \sin^2 x\,(1-\operatorname{cotg}^2 x) = 1-2\cos^2 x.$$

N. M.

VI. 651. Să se rezolve un triunghiu oarecare, cu următoarele date:

$$a = 35{,}48\,m \quad ; \quad b = 63{,}25\,m \quad ; \quad \sphericalangle A = 25^0 15'.$$

N. M.

VI. 652. Să se rezolve un triunghiu cunoscând s, p, A. Aplicație:

$$s = 35{,}72\,m^2 \quad ; \quad p = 20\,m \quad ; \quad \sphericalangle A = 62^0 14'.$$

N. M.

VI. 653. Să se arate, că într'un triunghiu oarecare avem totdeauna neegalitatea

$$a^2\,(1-2\cos A) < (b+c)^2\,(1-\cos A)^2.$$

GH. B.

VI. 654. Intr'un triunghiu oarecare avem inegalitatea

$$\operatorname{cosec} A + \operatorname{cosec} B + \operatorname{cosec} C \geqq 2\sqrt{3}.$$

C. I. Ț.

VI. 655. Să se demonstreze inegalitatea

$$\cos^4(x+y) + \cos^4(x-y) + 4\cos 2x\,\cos 2y\,\cos^2(x+y) < 1 + 2\cos^2(x+y)\cos^2(x-y).$$

H. P. I.

VI. 656. Să se arate că, dacă $a+b=c+d$, avem identitatea

$$\cos^2 a + \cos^2 c\,\cos^2 d + \sin^2 c\,\sin^2 d + \sin^2 b = 2\cos a\,\cos b\,\cos c\,\cos d.$$

H. P. I.

VI. 657. Să se determine triunghiurile pentru care

$$a^2\sin(B-C) + b^2\sin(C-A) + c^2\sin(A-B) = 0.$$

O. G. R.

VI. 658. Trei forțe concurente, care fac între ele unghiurile $(F_1, F_2) = 90^0$; $(F_2, F_3) = 120^0$ și $(F_3, F_1) = 150^0$, sunt proporționale cu $2\sqrt{3}$; 6; 3.

Să se arate că aceste forțe își fac echilibrul.

N. M.

VI. 659. Dacă cercul înscris triunghiului ABC este tangent cercului de diametru AB, atunci are loc relația

$$\overline{AC} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{CC'},$$

$\overline{CC'}$ fiind înălțimea vârfului C.

Ce devine această relație în cazul cercurilor exînscrise?

G. G. C.

VI. 660. Se dau două plane P și Q având muchia comună D și unghiul lor diedru α. Un punct A din planul Q se proiectează în A' pe planul P. Fie B, C două puncte luate pe dreapta D. Notăm distanța dela A la D cu a, iar $\overline{BC} = l$.

1°. Să se exprime volumul piramidei AA'BC cu ajutorul lui a, l și α. Pentru ce valoare a lui α volumul e maxim, presupunând a și l constante.

2°. Să se determine poziția punctului A astfel ca triunghiul BA'C să fie isoscel cu baza $\overline{BC}$ și $\sphericalangle BA'C = 2\alpha$. Să se exprime în acest caz volumul și aria totală a piramidei în funcție de l și α.

G. D. S.

VI. 661. Fie un triunghiu ABC dat. Ceviana AA' face unghiul α cu BC. Să se determine un punct M pe AA' astfel ca

$$\sphericalangle BMA' = \sphericalangle A'MC.$$

C. I. B.

Clasa VII-a. *Exerc. 569.* Fie

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}, \quad \Delta' = \begin{vmatrix} a+x & b+y & c+z \\ a'+x & b'+y & c'+z \\ a''+x & b''+y & c''+z \end{vmatrix},$$

$$\Delta'' = \begin{vmatrix} a+x & a'+y & a''+z \\ b+x & b'+y & b''+z \\ c+x & c'+y & c''+z \end{vmatrix}$$

$_x$, Δ_x'' rezultatul înlocuirii în Δ a coloanei întâia, respectiv liniei întâia cu x; avem

$$\Delta' = \Delta + \Delta_x' + \Delta_y' + \Delta_z' \quad ; \quad \Delta'' = \Delta + \Delta_x'' + \Delta_y'' + \Delta_z''.$$

N. M.

VII. 570. Să se reprezinte funcțiile

$$y = \frac{5x^2+3}{x^2+1} \quad ; \quad y = \pm\sqrt{\frac{x-3}{5-x}}.$$

N. M.

VII. 571. Să se studieze variația funcției

$$y = \frac{\sqrt{x^2 - a_1}}{x^2 - 8(a_3 - a_1)x + 10},$$

știind că a_1, a_2, a_3 sunt respectiv valorile lui x, y, z care sunt rădăcinile sistemului compatibil

$$2x + 3y + \lambda z = 1 \quad ; \quad x + 2y + 3z = \lambda \quad ; \quad 3x + \lambda y + z = 2$$
$$\lambda x + y + 2z = 3$$

corespunzătoare valorii pozitive a lui λ.

Să se reprezinte grafic variația funcției.

H. P. I.

VII. 572. In ce caz expresia

$$E \equiv \frac{\cos a}{\cos x} - \frac{\sin(x + \alpha)}{\cos(\alpha - a)}$$

este independentă de α.

H. P. I.

VII. 573. Să se calculeze derivatele funcțiilor

$$y = 2 \arcsin \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \quad ; \quad z = \arcsin 2(\sqrt{x} - 1)\sqrt{2\sqrt{x} - x}$$

și să se explice rezultatul.

H. P. I.

VII. 574. Să se studieze variația funcției

$$y = 4\sin^2 x - \sin x$$

și să se construiască curba reprezentativă.

G. G. C.

VII. 575. Să se calculeze determinantul

$$D \equiv \begin{vmatrix} \arcsin a & \arcsin b & \arcsin c \\ \arcsin b & \arcsin a & \arcsin b \\ \arcsin c & \arcsin c & \arcsin a \end{vmatrix}.$$

Folosind identitatea:

$$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin\left[x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2}\right],$$

să se pună valoarea determinantului D sub formă de produs și funcțiuni inverse.

G. G. C.

VII. 576. Să se rezolve sistemul:

$$x + y + z = 0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} x & x + c & x - b \\ y - c & y & y + a \\ z + b & z - a & z \end{vmatrix} = 0.$$

O. G. R.

VII. 577. Se dă funcțiunea y definită de:

$$6y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 6.$$

Să se găsească o relație rațională între y și derivata sa.

C. I. B.

VII. 578. Se dau

$$x = \frac{3t+1}{2t-1}, \quad y = \frac{4t+1}{3t-1}.$$

Să se calculeze derivatele lui x și y în raport cu t, apoi derivata lui y în raport cu x și să se afle relația dintre cele 3 derivate.

C. I. B.

Clasa VIII-a. *Exerc. 456.* Să se arate, că cercurile

$$x(x+2a)+(y+2b)\left(y+2b+\frac{2a}{m}\right)=0$$

$$(x+2a)(x+2a+2bm)+y(y+2b)=0$$

sunt tangente.

N. M.

VIII. 457. Fie un cerc variabil cu centrul I pe o dreaptă fixă D și tangent unei alte drepte fixe D'. Paralela din I la D' taie cercul în U și V. Punctele U și V descriu două drepte (u) și (v) concurente cu D, D'.

N. M.

VIII. 458. Considerând pe a și b drept coordonatele unui punct din plan, să se separe planul în regiuni după natura rădăcinilor ecuației

$$a^3x^4 + 3a^2x^3 + 3ax^2 + x + b = 0.$$

G. D. S.

VIII. 459. Să se studieze numărul rădăcinilor reale ale ecuației:

$$24a(a-1)x^5 - 15(2a^3 - 3a - 1)x^4 - 20(4a^4 - 8a^3 + a^2 + 2a + 2)$$
$$x^3 + 30(-2a^3 + 3a + 1)x^2 + 120a(a-1)x + \lambda = 0,$$

a fiind un număr real dat, iar λ un parametru.

O. N. Ț.

VIII. 460. Să se studieze numărul rădăcinilor reale ale ecuației:

$$P(x) \equiv 12ax^5 + (15a^2 + 78a + 15)x^4 + 40ax^3$$
$$+ (30a^2 + 156a + 30)x^2 + 60ax + b = 0.$$

O. N. Ț.

VIII. 461. Să se arate că ecuația:

$$5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$$

are toate rădăcinile imaginare. (Se va întrebuința teorema lui ROLLE).

O. N. Ț.

VIII. 462. Să se arate că ecuația

$$x^p + x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1 = 0$$

are cel mult o rădăcină reală.

O. N. Ț.

VIII. 463. Se consideră punctele A(a, o) și B(o, b) față de un sistem de axe dreptunghiulare XOY. Se cere:

1°. *a)* Să se afle coordonatele punctului C, așezat pe prima bisectoare a unghiului axelor, astfel încât $\widehat{BCA} = 90^0$.

b) Să se afle coordonatele punctului D, așezat tot pe prima bisectoare, astfel încât $\widehat{BDA} = 45^0$.

c) Dacă D′ este punctul de pe OD astfel ca $\widehat{BD'A} = 135^0$ (D și D′ de o parte și de alta a dreptei AB), să se verifice că $\sphericalangle D'AD = 90^0$.

2°. Să se scrie ecuațiile cercurilor ABC și ABD (D fiind în primul cadran) și să se determine elementele lor.

3°. Să se arate că punctele de intersecție ale laturilor opuse din patrulaterul AOBC și punctul comun tangentelor în C și O la cercul ABC se găsesc pe o dreaptă Δ perpendiculară pe AB.

4°. Să se scrie ecuația cercului ortogonal cercurilor ABC și ABD, cu centrul pe dreapta Δ.

G. D. S.

VIII. 464. Să se scrie ecuația cercului circumscris triunghiului definit de dreptele:

$$x + y + \lambda = 0 \quad , \quad 2x + 3y - 2 = 0 \quad , \quad x - 2y + 3 = 0$$

și să se găsească locul geometric al centrului când λ variază.

C. I. B.

VIII. 465. Se consideră elipsele

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\lambda^2} - 1 = 0$$

și tangentele paralele cu direcția de coeficient unghiular $\frac{1}{a}$. Să se afle locul geometric al punctelor de tangență când λ variază.

C. I. B.

Exerciţii Generale. *Exerc. 356.* In ce caz ecuaţia cu coeficienţii întregi

$$x^2 + px + q = 0$$

are rădăcini raţionale?

O. G. R.

E. G. 357. In sistemul cu baza de numeraţie B (B > 3), se dă patratul perfect *abcd* astfel că *c*, *d*, *ab* să fie consecutive. Să se arate că rădăcina sa patrată este divizibilă cu 33.

O. G. R.

E. G. 358. Dacă unui patrat perfect îi scădem 4, putem obţine triplul unui număr prim absolut?

I. L.

E. G. 359. Dacă avem:

$$i_1 = \sqrt{-1} \; ; \; i_2 = \sqrt{-i_1}; \ldots \; ; \; i_n = \sqrt{-i_{n-1}},$$

să se calculeze produsul

$$P_n = i_1 \cdot i_2 \ldots i_n .$$

I. L.

E. G. 360. Dacă avem:

$$i_1 = \sqrt{-1} \; ; \; i_2 = \sqrt{-i_1}; \ldots \; ; \; i_n = \sqrt{-i_{n-1}},$$

să se calculeze produsul:

$$P_{(n,\,n)} = i_1^{i_1} \cdot i_2^{i_2} \ldots i_n^{i_n} .$$

I. L.

E. G. 361. Dacă avem:

$$i_1 = \sqrt{-1} \; ; \; i_2 = \sqrt{-i_1}; \ldots \; ; \; i_n = \sqrt{-i_{n-1}},$$

să se calculeze produsul:

$$P_{(n/n)} = i_1^{\frac{1}{i_1}} \cdot i_2^{\frac{1}{i_2}} \ldots i_n^{\frac{1}{i_n}} .$$

I. L.

E. G. 362. Să se arate că expresiunea

$$E = 3n^5 + 6n^4 + 7n^3 + 6n^2 + 2n$$

este divizibilă cu 12, oricare ar fi *n* întreg.

C. I. Ţ.

E. G. 363. Să se găsească valorile reale ale lui *x* pentru care să avem egalităţile:

a) $\sqrt{x+2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2$

b) $\sqrt{x+2\sqrt{x+1}} - \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2$

considerând valoarea aritmetică a radicalului.

C. I. Ţ.

INSTRUCŢIUNI

a) Soluţiile exerciţiilor se vor scrie cu cerneală, pe sferturi de coală şi numai pe o parte a foii.

Dacă va fi nevoie de mai multe foi pentru soluţionarea unui exerciţiu, ele se vor coase sau lipi în partea stângă. Figurile, ce vor fi necesare pentru urmărirea exerciţiului se vor construi îngrijit, pe foi aparte, având formatul arătat mai sus şi se vor coase sau lipi odată cu soluţia.

Nu se vor trimite soluţiile mai multor exerciţii pe aceeaşi foaie.

b) Redactarea soluţiilor se va face astfel:

Sus, se va scrie numărul exerciţiului, dedesubt enunţul astfel cum e publicat în revistă, cu iniţialele propunătorului, apoi soluţia clar compusă, iar la sfârşit, iscălitura rezolvitorului în ordinea următoare:

Numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie, însoţit de clasa şi şcoala pe care o urmează.

c) Nu se vor lua în considerare soluţiile iscălite de 2 sau mai mulţi corespondenţi, nici soluţiile exerciţiilor propuse la clase inferioare aceleia în care corespondentul se află. Pentru redijarea soluţiilor se pot vedea indicaţiile din Nr. 1, Vol. IV.

d) Soluţiile se primesc timp de 3 luni dela propunerea exerciţiului, numai dela abonaţii „Suplimentului cu Exerciţii" al Gazetei Matematice, pe adresa Locot. C. D. Ionescu-Ţiu, Casa Gazeta Matematică, Calea Griviţei 158, Bucureşti 2.

Drepturile de reproducere rezervate Societăţii «Gazeta Matematică».

Elevii claselor VI, VII şi VIII, cu bogată activitate la această revistă îşi pot lărgi cadrul activităţii soluţionând probleme din „Gazeta Matematică".

In Biblioteca „Gazetei Matematice" au apărut şi se găsesc la adresa indicată mai sus, următoarele:

III. **N. Abramescu,** Lecţiuni elementare de Algebră superioară, pentru clasa VIII-a ştiinţifică, Ediţia VI-a . . . . . Lei 120

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** Vocabular Matematic . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** Culegere de Probleme de Geometrie . . . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. Istoric, învăţăminte. Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 200 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I. (Goniometrie) revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** Culegere de Probleme de Aritmetică. Partea I. Aritmetica raţionată . . . . . Lei 190

XIV. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I-a. (Trigonometrie plană). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

XV. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 120

XVI. **G. Ţiţeica,** Culegere de Probleme de Geometrie Analitică. Partea I. Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 140

XVII. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 240

Biblioteca Istorică a GAZETEI MATEMATICE

1. Elementele lui **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană) tradusă din limba greacă de *V. Marian* . . . . . Lei 160

Suplimentul cu Exerciţii. Abonamentul anual (9 numere) . . Lei 50

„Gazeta Matematică" apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimite pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ"

Casa Gazeta Matematică — Calea Griviţei No. 158. — Bucureşti 2.

(Telefon: 3-9803).

M. O., IMPRIMERIA NAŢIONALĂ — C. 69 094

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL VII. No. 7 1 APRILIE 1941

BIBLIOTECA CENTRALĂ
„ASOCIAŢIUNII"
SIBIIU

SOCIETATEA GAZETA MATEMATICĂ
CALEA GRIVIŢEI, 158. BUCUREŞTI 2. — TELEFON 3-9803

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL VII. No. 7 — 1 APRILIE 1941

ABONAMENTUL LEI 50 PE AN (9 numere)

Soluţii şi orice corespondenţă pe adresa:

Locot. C. D. IONESCU-ŢIU

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviţei 158. — Bucureşti 2

CONCURSUL „GAZETEI MATEMATICE"

După cum s'a anunţat în numărul 4 din Decemvrie 1940 şi Nr. 6 din Februarie 1941, al *Gazetei Matematice*, anul acesta se va ţine un concurs de matematici între elevii liceelor din ţară şi studenţii anului I al Politechnicei din Bucureşti.

Dăm mai jos lista completă a candidaţilor înscrişi până la ultimul termen de 5 Martie inclusiv şi admişi pentru concurs.

Pentru Clasa IV-a: *Brighiu I. Corneliu, Ieşan Şt. Alexandru, Mateescu P. Mihaela, Mihăilescu I. Ştefan, Prisecaru D. Mircea.*

Pentru Clasa V-a: *Andrei Gh. Aurel, Cioroianu M. Constantin, Dumitrescu F. Dan, Iliescu C. Constantin, Jupcianu N. Nicolae, Marin M. Dan, Mihalcu I. Ilie, Mişicu V. Mircea, Roşu M. Mircea, Staicu I. Constantin, Timotin Al. Alexandru, Turculeţ D. Tiberiu, Udrea C. Ilie, Vasiliu Gh. Dumitru.*

Pentru Clasa VI-a: *Aron I. Gheorghe, Bădescu F. Florin, Constantinescu I. Emil, Gheorghiu D. Marius, Petrescu I. Ştefan, Popa Teodor, Popescu Gh. Marin, Prişcu R. Alexandru, Stoianovici I. Şerban, Stoika Victor.*

Pentru Clasa VII-a: *Aldea V. Virgil, Andreescu Gh. Ioan, Arendt R. Emil, Bogdan Gr. Gheorghe, Crăciunescu I. Marcel, Cristea I. Constantin, Diaconescu V. Constantin, Drăghicescu P. Paul, Floreşteanu Alexandru, Ganea M. Marin, Mănescu Gh. Ioan, Musceleanu S. Doru, Popa N. Aurel.*

Pentru Clasa VIII-a: *Aldea V. Minea, Bârlea Gh. Victor, Broşteanu Gh. Gheorghe, Chintescu M. Matei, Cruceru Gh. Constantin, Dragomir M. Adrian, Gligor N. Ioan, Mărgărit I. Nicolae, Nicolau Constantin, Niculescu C. Mircea, Petrescu Iulian, Pintilie I. Ion, Sbârnea D. Gheorghe, Şerban C. Constantin, Ştefanovici I. Mircea, Vasiliu C. Margareta, Vijelie Gh. Eugen, Voinea P. Radu.*

Pentru anul I al Politechnicei Bucureşti: *Boeangiu D. Dumitru, Costescu Gh. Ion, Papadopol Demetra-Elena, Rusu L. Mircea, Trefilov I. Mihail, Văduva F. Marin.*

Adică 5 candidaţi pentru clasa IV-a, 14 pentru clasa V-a, 10 pentru clasa VI-a, 13 pentru clasa VII-a, 18 pentru clasa VIII-a, şi 6 pentru anul I al Politechnicei Bucureşti.

Fiecare candidat va da câte o lucrare scrisă din ambele materii la care s'a înscris. Lucrările scrise sunt eliminatorii.

Prima lucrare scrisă va avea loc Joi 24 Aprilie 1941, dela ora 8^{30} până la 11^{30}; iar a doua lucrare scrisă în aceeaşi zi, dela ora 15 până la ora 18, la Politechnică, Calea Griviţei 132, Bucureşti.

Oralul va începe Vineri 25 Aprilie, ora 8^{30}, tot în localul Politechnicei. Candidaţilor elevi de liceu înscrişi la concurs, care nu dispun de mijloace materiale pentru venirea şi întreţinerea lor în Bucureşti (după cum au arătat în cererile lor), li se vor trimite în vacanţa de Paşti sumele necesare transportului la Bucureşti şi li se va comunica locul unde vor fi găzduiţi în tot timpul concursului.

Eventualele modificări vor fi la timp comunicate.

DELEGAŢIA SOCIETĂŢII.

EXERCIŢII REZOLVATE

Clasa V-a. *Exerc. 634. Perpendiculara, într'un punct al medianei* AM *a triunghiului* ABC *dreptunghic în* A, *întâlneşte catetele* AB *şi* AC *în* D *şi* E. *Să se demonstreze că patrulaterul* BDEC *este totdeauna inscriptibil.*

GH. B.

Fie P punctul pe mediana AM în care se ridică perpendiculara DE, definită ca în enunţ.

Consider că P este între A şi M. In triunghiul dreptunghic ABC, mediana AM formează cu ipotenuza şi catetele triunghiurile AMC, AMB isoscele. Deci

$$\sphericalangle ACM = \sphericalangle CAM \qquad (1)$$

Triunghiurile dreptunghice ABC şi PAE având unghiurile ascuţite din C şi A conform cu (1), egale rezultă că şi celelalte unghiuri ascuţite sunt egale, deci

$$\sphericalangle DEA = \sphericalangle CBD$$

care arată că patrulaterul BDEC este inscriptibil.

Demonstraţia este identică şi pentru cazurile când P se află pe prelungirea lui AM sau pe prelungirea lui MA.

V. 635. Se dă triunghiul ABC, *dreptunghic în* A, *şi fie* A′ *proiecţia lui* A *pe* BC, *iar* A″ *proiecţia lui* A′ *pe* AC. *Să se demonstreze că, dacă* AB *şi* A′C *sunt egale, atunci* AC, *bisectoarea unghiului* BA′A″ *şi perpendiculara în* B *pe* BC *se întâlnesc într'un punct.*

GH. B.

Triunghiurile dreptunghice AA′B şi A′A″C sunt egale, având prin ipoteză ipotenuzele AB, A′C egale şi unghiurile ascuţite ABC, A″A′C egale ca alterne interne. Rezultă

$$\overline{A'B} = \overline{A'A''}. \qquad (1)$$

Fie P intersecţia lui AC cu perpendiculara în B pe BC. Triunghiurile dreptunghice PBA′, PA″A′ sunt egale ca având ipotenuza PA′ comună iar catetele A′B, A′A″ egale după (1). Rezultă că unghiurile BA′P, A″A′P sunt egale, ceea ce demonstrează teorema.

Se poate demonstra proprietatea ducând bisectoarea A′P a unghiului BA′A″ şi dovedind că PB este perpendiculară pe BC. In adevăr în acest caz triunghiurile PA′B, PA′A″ sunt egale ca având laturile A′B, A′A″ egale, latura A′P comună şi unghiurile PA′B, PA′A″ egale. Deci unghiul PBA′ este egal cu unghiul drept PA″A′.

Clasa VII-a. *Exerc. 493. Să se execute epura unui grup de de două corpuri, un cilindru şi un con, circulare drepte. Baza cilindrului este în planul orizontal. Conul are înălţimea orizontală, se sprijină cu vârful său* V *pe o generatoare dată a cilindrului în mijlocul ei şi atinge planele de proiecţie în câte un punct. Date numerice în mm:*

Centrul bazei de sus a cilindrului O (40, 80, 60); *raza sa* R = 20; *generatoarea* G *este vizibilă, iar raza corespunzătoare face cu direcţia pozitivă a liniei de pământ un unghiu de* 315°. *Înălţimea conului* $h = 70$; *diametrul bazei sale egal cu înălţimea cilindrului.*

V. GH.

Reprezentăm mai întâiu cilindrul şi îi punem generatoarea G, ţinând seamă de datele numerice. Vârful conului ($v'v$), este mijlocul verticalei G. Cercul de bază al conului este într'un plan vertical şi se proiectează orizontaliceşte după un segment de dreaptă iar verticaliceşte după o elipsă. Generatoarea conului este, ca mărime, ipotenuza unui triunghiu dreptunghiu ale cărui catete s'au dat. In planul orizontal, din v ca centru cu o rază cât generatoarea conului, intersectăm linia de pământ de ex. în punctul A_1. Apoi construim $\sphericalangle A_1 v B_1$ egal cu unghiul conului (deasemenea cunoscut). $\overline{A_1B_1}$ = înălţimea cilindrului, este proiecţia orizontală a bazei conului. Punctele A_1 şi B_1 le raportăm pe orizontala dusă prin v' iar mijlocul C_1 al lui $\overline{A_1B_1}$ îl raportăm în D_1' pe linia de pământ şi în E_1' pe prelungirea proiecţiei verticale a bazei cilindrului. In fine construim în planul vertical elipsa de axe $\overline{A_1'B_1'}$ şi $\overline{D'E_1'}$. Cilindrul este unic, dar în condiţiile date corespund două conuri.

Clasa VIII-a. *Exerc. 425. Fie* ABC *un triunghiu dreptunghic isoscel şi un punct* M *pe cercul* (O) *circumscris triunghiului. Fie* A', B', C' *intersecţiile dreptelor* (MA, BC); (MB, CA); (MC, AB) *şi* (Γ) *cercul circumscris triunghiului* A'B'C'.

1°. *Să se arate că* M *descriind cercul* (O), *cercurile* (Γ) *sunt ortogonale unui cerc fix şi au centrele colineare.*

2°. A", B", C" *fiind celelalte intersecţii ale laturilor triunghiului* ABC *cu cercul* (Γ) *să se arate că dreptele* AA", BB", CC" *sunt concurente într'un punct* N.

3°. *Să se demonstreze că dreapta* MN *trece printr'un punct fix când punctul* M *variază.*

G. G. C.

Soluţie. Luând ca axe laturile triunghiului şi punând AB=AC=a ecuaţia cercului (O) este

$$x^2 + y^2 - a(x + y) = 0$$

iar ecuaţiile dreptelor BM şi CM sunt

$$y - \lambda(x - a) = 0 \qquad x + \lambda(y - a) = 0$$

şi deci coordonatele lui M sunt

$$x = \frac{a\lambda(\lambda + 1)}{\lambda^2 + 1} \qquad y = \frac{a\lambda(\lambda - 1)}{\lambda^2 + 1}.$$

Deasemeni avem

$$A'\left\{\frac{a(\lambda+1)}{2\lambda}, \frac{a(\lambda-1)}{2\lambda}\right\}, \quad B'\{o, -\lambda a\}, \quad C'\{\lambda a, o\}$$

astfel că ecuația cercului (Γ) este

$$x^2+y^2-\frac{a(2\lambda^2+1)}{2\lambda}(x-y)+\frac{a^2}{2}=0.$$

1°. Locul geometric al centrelor este deci dreapta $x+y=0$ și cum puterea originii față de (Γ) este $\frac{a^2}{2}$ rezultă că aceste cercuri sunt ortogonale cercurilor

$$x^2+y^2-\frac{a^2}{2}=0.$$

2°. Cercul (Γ) este determinat prin centrul său

$$x_0=-y_0=\frac{a(2\lambda^2+1)}{4\lambda}$$

ceea ce arată că avem 2 puncte M și M' definite prin rădăcinile ecuației

$$2a\lambda^2-4x_0\lambda+a=0 \qquad (1)$$

și deci cercul Γ e circumscris unui triunghiu A″B″C″ analog lui A′B′C′ punctul M fiind înlocuit prin N ceea ce probează concurența dreptelor AA″, BB″, CC″ în N.

Ecuația dreptei MN este

$$(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_1\lambda_2-1)x+(\lambda_1\lambda_2-\lambda_1-\lambda_2-1)y-2a\lambda_1\lambda_2=0$$

λ_1 și λ_2 fiind rădăcinile ecuației (1), ea se scrie deci

$$(4x_0-a)x-(4x_0+a)y-2a^2=0$$

ceea ce arată că trece printr'un punct fix definit de dreptele

$$x-y=0 \quad x+y+2a=0.$$

Exerciții generale. *Exerc. 320. Să se calculeze x astfel încât să avem:*

$$\varphi_x(1941)=1.$$

I. L.

Avem:

$$1941 = 3 \cdot 647$$
$$\varphi_1(1941) = 2^2 \cdot 17 \cdot 19$$
$$\varphi_2(1941) = 2^6 \cdot 3^2$$
$$\varphi_3(1941) = 2^6 \cdot 3$$
$$\varphi_4(1941) = 2^6$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi_9(1941) = 1.$$

Deci $x \geqslant 9$.

Soluția dată în No. 5 pag. 109 este deci eronată.

E. G. 324. Să se rezolve ecuația:

$$\varphi_x(1940) = \varphi_y(1941)$$

$\varphi_i(I)$ *fiind indicatorul de ordinul* i *a lui* I.

I. L.

In soluția dată în No. 5 pag. 110 trebue să se corecteze:

$$\varphi_1(1941) = 2^2 \cdot 17 \cdot 19$$
$$\varphi_2(1941) = 2^6 \cdot 3^2$$
$$\varphi_3(1941) = 2^6 \cdot 3$$
$$\varphi_4(1941) = 2^6.$$

Prin urmare cum avem $\varphi_4(1940) = 2^6$, atunci: $x = y$ pentru $y \geqslant 4$.

Până la 10 Martie s'au primit soluțiuni bune pentru exercițiile publicate în numerele 4, 5, 6 anul VII, dela [1]):

Liceul „Carmen-Sylva", București.

Clasa V-a: Bărdescu T. Marilena (V: 646).

Clasa VI-a: Epure C. Marilena (VI: 631), Petrov E. Andreica (VI: 631, 3, 9, 50).

Clasa VII-a: Davidoglu A. Mira (VII: 539).

Clasa VIII-a: Crașoveanu Lucia (VIII: 442, 61), Vasiliu Margareta (VIII: 428, 42, 61).

---

1) Semnul * însoțește numărul unui exercițiu rezolvat foarte bine.

Şcoala Centrală, Bucureşti.

Clasa VI-a: Ottone P. Clelia (VI: 631).

Clasa VII-a: Agapie G. Elena (VII: 570), Ştefănescu C. Carmen (VII: 562, 70), Ţoni Ortansa (VII: 562, 3).

Liceul „Regina Maria", Bucureşti.

Clasa III-a: Panteli Irina Fiona (III: 148, 9, 50, 1, 2).

Clasa IV-a: Agapie G. Paula (IV: 560*, 1, 9).

Liceul „Iulia Haşdeu", Bucureşti.

Clase VII-a: Stoia N. Silvia (VII: 538).

Liceul „Ortodox Internat", Bucureşti.

Clasa IV-a: Mateescu P. Mihaela (IV: 545, 50*, 1, 2, 3, 4, 60, 9, V: 666, 8*).

Institutul „Sf. Maria", Bucureşti.

Clasa V-a: Odobeşteanu R. France (V: 665, 8).

Liceul „Despina Doamna", Ploeşti.

Clasa V-a: Boca C. Stelica (V: 636, 46).

Liceul „Oltea Doamna", Iaşi.

Clasa III-a: Albu Aurelia (III: 129), Andreian Cabiria (III: 154, 5, 6), Perjiel I. Zoe (III: 151, 2).

Clasa V-a: Lăbuşcă N. Elena (V: 636, 65).

Clasa VII: Popovici I. Florica (VII: 558, 61, 2), Teodorescu Olga (VII: 561, 2).

Colegiul Naţional „Sf. Sava", Bucureşti.

Clasa V-a; Bâlcu St. Nicolae (V: 635, 6*), Harbunicu P. V. (V: 634, 5, E. G.: 325), Dumitrescu F. Dan (V: 636, 45*, 6, E. G.: 333), Popa A. Dan (V: 636, 8*), Rădulescu T. Adrian (V: 636, 8*, 46, 65).

Clasa VI-a: Petrescu Ştefan (VI: 619*), Ştefănescu Constantin (VI: 619*, 23), Stoika V. Victor (VI: 639).

Clasa VII-a: Andonie St. I. (VII: 565, E. G.: 319, 25, 7), Botez V. Radu (VII: 538, 62, 70), Nadolu Gh. (VII: 538), Sclavu Dionisie (VII: 538, 47, 8).

Clasa VIII-a: Dima N. Silviu (VIII: 431, 2, 42, 3), Beceresku D. (VIII: 444, 5).

Liceul „Gh. Lazăr", Bucureşti.

Clasa V-a: Timotin A. Alex. (V: 631, 6, 46, 8*).

Clasa VI-a: Prişcu R. Alex. (VI: 620, 26), Popescu V. V. (VI: 620).

Clasa VII-a: Prişcu R. Răsvan (VII: 555, VIII: 428).

Liceul „Matei Basarab", Bucureşti.

Clasa III-a: Costin A. Alexandru (III: 148, 51, 63*).

Clasa IV-a: Ieşan St. Alexandru (IV: 550*, 60*, 1*, 9).

Liceul „Gh. Şincai", Bucureşti.

Clasa VI-a: Constantinescu I. Mihail (VI: 650*), Constantinescu I. Emil (VI: 616, E. G.: 321*, 6*), Dimitriu D. T. (VI: 639, VII: 551).
Clasa VIII-a: Anghel Tudor (VIII: 428, 31, 2*, 5, 6).

Liceul „Cantemir Vodă", Bucureşti.

Clasa IV-a: Finţescu I. N. (IV: 537, 8, 9).

Liceul „Mihail Eminescu", Bucureşti.

Clasa VI-a: Aron I. Gheorghe (VI: 619, 20, 3, 9, VII: 539).

Liceul „Mihai Viteazul", Bucureşti.

Clasa V-a: Ionescu Gr. Ilie (V: 668*), Vernescu V. Mihail (V: 636*).
Clasa VIII-a: Pelecudi Cristian (VIII: 440, 1, E. G.: 355), Ştefănescu I. D. (VIII: 455), Vernescu V. P. (VIII: 444, E. G.: 336).

Liceul „Aurel Vlaicu", Bucureşti.

Clasa VII-a: Mănescu C. I. (VIII: 557).
Clasa VIII-a: Barbaiani A. Ioan (VIII: 428, 31, 5, 6, E. G.: 320, 6), Buga I. Mihail (VIII: 432, E. G.: 322, 5), Davidescu M. Alex. (VIII: 428, E. G.: 321).

Liceul „Marele Voevod Mihai", Bucureşti.

Clasa VIII-a: Iordache M. Sterian (VIII: 434, 9, 44, 5, 55, 6*), Popescu Florin (VIII: 432, 5, 6, 56*).

Liceul „Spiru Haret", Bucureşti.

Clasa VIII-a: Mişu A. (VIII: 442, 3), Negrescu C. Ioan (VIII: 431, 45).

Liceul „Titu Maiorescu", Bucureşti.

Clasa V-a: Benghiuj V. Ioan (V: 646).
Clasa VII-a: Marinescu I. Al. V. (VIII: 547), Seni Claudiu (VII: 551, 8, 62).
Clasa VIII-a: Bugaievski Eug. (VIII: 432*).

Institutul „Schewitz-Thierrin", Bucureşti.

Clasa VIII-a: Kehaian Z. (VIII: 442, 3, 4), Mărgărit I. N. (VIII: 435).

Liceul „Sft. Andrei" Bucureşti.

Clasa VII-a: Ganea M. Marin (VII: 562, 3, 4).

Liceul „Principele Carol", Bucureşti.

Clasa IV-a: Bongard L. N. (IV: 569).

Liceul „Moise Nicoară", Arad.

Clasa VI-a: Popa T. Teodor (VI: 612, 9*, 22*, 3*, 5, 9, 34, 9, 40).
Clasa VIII-a: Gligor N. I. (VIII: 434, 55).

Liceul „Dr. Ion Meşotă", Braşov.

Clasa III-a: COSTA MARCEL (III: 142).

Clasa IV-a: ALEXANDRESU M. MIRCEA (IV: 561*). IONESCU ERACLE (IV: 550).

Clasa VI-a: GEORGESCU MIHAI (VI: 639), POPA ST. GH. (VIII: 458), VOINA GH. I. (VI: 631).

Liceul „Ioniţă Assan", Caracal.

Clasa VII-a: MUSCELEANU DINU (VII: 538, E. G.: 321, 6), MUSCELEANU S. I. (VII: 547, VIII: 428, E. G.: 321, 35).

Liceul „Ştirbei Vodă", Călăraşi.

Clasa IV-a: NICOLAESCU T. VIOREL (IV: 538).

Clasa VI-a: CULEA I. DUMITRU (VI: 650, 1*), DIMA N. ŞTEFAN (VI: 650, 1), RĂDULESCU V. NICOLAE (VI: 639, 46, 50), STOENESCU R. IOAN (VI: 650, 1).

Liceul „D. B. Ştirbey", Câmpina.

Clasa VI-a: RĂDULESCU N. N. (VI: 629*, 39*).

Liceul Militar, Câmpulung.

Clasa III-a: CRIŞAN I. ANTON (III: 148, 9), DRAGOMIRESCU D. PETRE (III: 148, 9), GAVRILESCU MARCEL (III: 148, 9), IAŞOVEANU D. AUREL (III: 148), LOZINCA ST. MIRCEA (III: 148, 9), MIHĂILEANU A. ST. (III: 149), MITTĂ N. MIRCEA (III: 148, 9, 50), MOCANU MIRCEA (III: 148, 9), NICOLESCU C. CORNELIU (III: 148, 9, 50, 1, 2), PETREA ST. AUREL (III: 148, 9), RĂDULESCU VICTOR (III: 148), ROŞCA S. EMIL (III: 149), ŞERBAN ANTON (III: 148, 9, 50), SIBIŞTEANU D. (III: 152), ŢUŢUIANU ŞTEFAN (III: 149).

Clasa V-a: CIMBRU V. MIHAI (V: 646), STAICU CONSTANTIN (V: 631).

Clasa VII-a: BĂRBUŢ I. TOMY (VII: 428, 547), TOPÂRCEANU I. G. (VII: 538).

Clasa VIII-a: DUMITRESCU C. (VIII: 455), BOTEZ M. (VIII: 455).

Liceul „Mircea cel Bătrân", Constanţa.

Clasa VII-a: SOTIRIU H. T. (VII: 551).

Liceul „Fraţii Buzeşti", Craiova.

Clasa VIII-a: VOINEA P. RADU (VIII: 434, 5, 7, 9, 40, 1, E. G.: 333).

Liceul militar „Regele Ferdinand I", Craiova.

Clasa IV-a: ANTACHE N. G. (IV: 537, 42), BARBĂLATĂ I. C. (IV: 537), BEŞCHEA C. M. (IV: 537), BOLDEANU G. M. (IV: 537), CHIRIAC A. G. (IV: 537, 42), CRUCEANU T. A. (IV: 537, 42), DIMITRIU M. M. (IV: 537, 42), DIMITRIU N. V. (IV: 537), EFTIMIE M. (IV: 537, 42), IATAN I. I. (IV: 537, 42), IONESCU T. P. (IV: 537, 42), MILOIU G. A. (IV: 537, 42), PETROVICI A. (IV: 530, 7, 42), PETROAIA V. I. (IV: 542), ROŞUŢ G. (IV: 537, 42), ROZNOVANU I. (IV: 537, 42), STEENSBALLE V. (IV: 537), STOENESCU D. (IV: 537, 42).

Clasa VI-a: Florea V. V. (E. G.: 333), Pavelescu N. (VI: 634), Sburlan C. (VI: 634).

Clasa VII-a: Cristea Const. (VII: 551, 4, 5, 7, 8), Filip G. Gh. (VII: 555, 7), Harea Vlad (VII: 555, 6, 7), Miroslav T. (VII: 634).

Clasa VIII-a: Ilie Nicolae (E. G.: 332), Moldoveanu N. D. (E. G.: 332), Preotu St. Pavel (E. G.: 332), Vesa R. Virgiliu (E. G.: 332).

Liceul Militar „D. A. Sturdza", Craiova.

Clasa III-a: Stanciu Mihail (III: 148, 51, 2).

Clasa IV-a: Angheloiu I. Ioan (IV: 538), Cârstea Marin (IV: 532, 6, 7), Dediu M. Ştefan (IV: 532, 8), Demetrescu Marius (IV: 532, 7, 8), Demetrescu Pant. Ilarion (IV: 538), Dimitriu I. Şerban (IV: 538), Gogoaşe Sever (IV: 532), Cihinţei Gh. (IV: 536, 7, 8), Huzureanu Gh. Mihai (IV: 537, 8), Ilie C. Gheorghe (IV: 537, 8), Ionescu I. Nicolae (IV: 538), Mavrodin Valeriu (IV: 538), Nicolicioiu St. Dumitru (IV: 537), Oniţă I. Gh. (IV: 532, 7, 8), Popa Al. Nic. (IV: 532, 3, 7), Popescu V. Anton (IV: 537, 7, 8), Popescu Iulian (IV: 537), Rusu T. Nic. (IV: 537, 8), Săvulescu Eug. Val. (IV: 538), Stoian P. Ioan (IV: 537, 8), Ulmet V. Valeriu (IV: 532, 8).

Clasa V-a: Dragu Radu (V: 632, 4, 5), Grigoriu I. M. (V: 634, 5), Lazăr Gh. St. (V: 634, 5), Mareş I. S. (V: 632, 4), Matei I. I. (V: 635), Udrea C. I. (V: 635).

Clasa VI-a: Bădescu Florin (VI: 637, E. G.: 332), Constantinescu Const. (VI: 637, E. G.: 332), Dinculescu Const. (VI: 637, E. G.: 332).

Clasa VII-a: Antonescu D. I. (VII: 538), Bălănescu V. (VII: 557), Bărbuceanu V. (VII: 555, 7), Cercel C. VII: 555), Constantinescu D. I. (VII: 538), Crăciun I. Em. (VII: 538), Diaconu D. A. (VII: 538, 54, 6, 8, 61, 3, E. G.: 332, 3), Grecianu C. Const. (VII: 555), Iliescu D. Tr. (VII: 538), Iliescu R. Dan (VII: 555), Movanu I. Petre (VII: 538, 57, 8), Manea G. I. (VII: 555), Mateescu Aurel (VII: 551, 3, 4, 62, 3, E. G.: 354, 5, 62), Mateescu B. C. (E. G.: 332), Negrilă Traian (VII: 547, 55, 7, 8), Paşoi N. Dumitru (VII: 538, 47, 58, 63, 7), Popa I. E. (VII: 538 57), Popescu Gh. Gh. (VII: 538), Popescu D. V. (VII: 538), Şerban P. (VII: 538, 61, 3), Vâlceanu R. (VII: 538), Zaharia B. Sim. (VII: 538).

Clasa VIII-a: Bărbulescu Gh. (VIII: 455), Constantinescu I. St. (VIII: 442), Gheţe Ioan (VIII: 453), Gheorghe C. Nicolae (VIII: 453), Ioniţă D. G. (VIII: 442), Munteanu N. Fl. (VIII: 434), Moldoveanu N. D. (VIII: 428), Popescu Dob. (VIII: 428), Sitaru Const. (VIII: 434, 53), Spineanu P. (VIII: 455).

Liceul „Ion Maiorescu", Giurgiu.

Clasa VIII-a: Petrescu R. Gh. (VIII: 434).

Liceul Internat Iaşi.

Clasa V-a: Dolinescu C. Marcel (V: 646, 65).

Clasa VI-a: Eftimie Gr. Alex. (VI: 619*, 39).

Clasa VII-a: Manolache C. Mircea (VII: 544, 60, 3, 9*, VIII: 428).

Liceul militar, Iași.

Clasa III-a: Barbălată I. (III: 142), Benescu I. N. (III: 142), Ionescu I. N. (III: 142), Kica-Roșie Marcel (III: 142), Nache D. (III: 150, 1, 2).

Clasa IV-a: Bejan G. (IV: 544, 5), Brighiu I. C. (IV: 544, 5, 7), Burlibașa M. (IV: 510), Cosmiță I. Fl. (IV: 510), Edu C. E. (IV: 510, 2, 3, 38, 44, 5, 7, 8), Ingat Gh. Mircea (IV: 510), Matei N. Fl. (IV: 510), Păstrăvanu Tr. (IV: 510, 38, 44).

Clasa V-a: Andreescu M. M. (V: 634, E. G.: 334), Bosinceanu C. C. (V: 634, E. G.: 322, 5, 6, 34), Ganea Nicușor (V: 631), Ionescu Mihai (V: 631), Gh. T. Florea (E. G.: 334), Popa N. N. (V: 632, 4, E. G.: 322, 5, 34), Turculeț D. T. (V: 615, 34, E. G.: 334).

Clasa VI-a: Alexandru M. (VI: 633), Bădulescu M. (VI: 633, 4), Bucur N. G. (VI: 633), Căruntu Fl. (VI: 598, 633), Clinchievici L. M. (VI: 663), Iftode I. C. (VI: 633), Mateescu G. (633, 4), Marinescu M. I. (VI: 633, 4), Milea C. (VI: 633, 4), Palade M. (VI: 634), Puchiu T. G. (VI: 634), Turculeț T. (VI: 633).

Clasa VII-a: Drăghicescu P. P. (VII: 551, 2, 5, 6, 7, 8, 67, 8, E. G.: 335*), Eliade Victor (VII: 538), Jacomi M. (VII: 557), Manoliu G. (VII: 556, 7), Manolache C. Mircea (VII: 557, 61, 76), Pașoi N. A. (VII: 539), A. N. Popa (VII: 547, 8, E. G.: 327, 30, 1), Stamate Aurel (VII: 538).

Liceul „Aurel Vlaicu", Orăștie.

Clasa VIII-a: German Z. E. (VIII: 428, E. G. 332).

Liceul „Sf. Petru și Pavel", Ploești.

Clasa V-a: Iupceanu N. N. (V: 613).
Clasa VI-a: Diaconescu D. I. (VI: 631).
Clasa VII: Pandelescu I. (E. G. 332).
Clasa VIII-a: Palancă C. Const. (VIII: 428, 30. 1, 2).

Liceul „Al. Lahovary", Râmnicul-Vâlcea.

Clasa VII-a: Andreescu Gh. I. (VII: 538, 62, 3, 70, E. G.: 315, 21, 34), Boerescu D. Dumitru (VII: 538, 62, 3, 70, E. G.: 321).

Liceul „Radu Greceanu", Slatina.

Clasa VI-a: Dionisie P. Mihai (VI: 631, E. G.: 321).
Clasa VII-a: Zeveleanu Const. (VII: 548).

Liceul „Tudor Vladimirescu", Târgu-Jiu.

Clasa V-a: Diaconescu A. Const. (V: 636, 8, 46), Gâță Gh Gh. (V: 636, 8, 46).
Clasa VII-a: Dănău C. (VII: 567, 3, 7, 9), Vijulan Victor (VII: 538).

Liceul „D. A. Sturdza", Tecuci.

Clasa VIII-a: Sbârnea D. G. (VIII: 428, 34, 5, 6, E. G.: 333).

Liceul militar „Mihai Viteazu", Timişoara.

Clasa IV-a: Dumitrescu T. Ioan (IV: 551), Pavică V. (IV: 547).
Clasa V-a: Teodorescu C. (V: 612, E. G.: 334), Vasiliu G. D. (V: 612).
Clasa VI-a: Cicei Alex. (VI: 648), Tonciu Gh. (VI: 648), Vodislav Gh. (VI: 631).
Clasa VII-a: Baranga T. G. (VII: 538), Bălan V. Iulian (VII: 562, 3), Brânduş V: (VII: 562, 3), Diaconescu C. Nic. (VII: 562), Radu N. Ioan (VII: 562, 3), Zaharia V. Gh. (VII: 562).

Liceul „Traian", Turnu-Severin.

Clasa VII: Corâci I. Cezar (VII: 538, E. G.: 321*, 2, 5, 6, 7), Mihăescu G. (VII: 561, 2).
Clasa VIII-a: Bengulescu A. C. (VIII: 428), Cruceru Gh. C. (E. G.: 334*, 8*, 41).

Elevi particulari.

Clasa VII-a: Berceanu B. (E. G.: 326), Văituş O. T. (E. G.: 299).
Clasa VIII-a: Moscovici Eug. Nic. (VIII: 446, E. G.: 345).

Nu au fost corectate soluţiile mai multor exerciţii pe aceeaşi foaie, exerciţiile unde nu s'au trecut iniţialele propunătorului, s'au s'a observat că sunt copiate.

EXERCIŢII PROPUSE

Soluţiile exerciţiilor propuse în acest număr se primesc până la 1 Iulie 1941

Clasa III-a. *Exerc. 168.* Se dă un trapez dreptunghiu ABCD ($\hat{A} = \hat{B} = 90^0$) şi astfel că patrulaterul EFGH, care are vârfurile respectiv mijloacele laturilor $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, este un dreptunghiu de dimensiuni:

$$a = 6{,}5 \text{ cm} \quad ; \quad b = 10 \text{ cm}.$$

Ştiind că $\overline{AB} = 12$ cm, să se calculeze *perimetrul* şi *suprafaţa* trapezului ABCD.

O. N. Ţ.

III. 169. Fie cercul cu centrul în O şi patratul ABCD înscris în cercul O. Prelungim latura $\overline{BC}$ de o parte şi de alta cu segmentele $\overline{CF}$ şi $\overline{BE}$ egale cu latura acestui patrat. Să se arate, că:

a) Dreptele AE şi FD sunt tangente cercului O;

b) Ele se întâlnesc într'un punct T situat la o distanţă de centru egală cu latura patratului dat;

c) Aria triunghiului ETF este $\frac{9}{4}$ din aria patratului dat.

O. N. Ţ.

III. 170. Intr'un cerc O însemnăm succesiv cu A, C', B, A', C, B' punctele care împart acest cerc în şase părţi egale.

Să se arate, că triunghiurile ABC şi A'B'C' au în comun aria unui exagon regulat MNPRST, cu centrul în O.

Să se afle apoi raportul ariei exagonului MNPRST către aria cercului.

O. N. Ţ.

III. 171. Să se generalizeze problema precedentă pentru *opt puncte* şi pentru *douăsprezece puncte* luate pe un cerc O şi care-l împart în părţi egale.

O. N. Ţ.

III. 172. Se dă un trapez isoscel ABCD (AD ∥ BC) având unghiul dela baza mare de 60°, iar $\overline{AD} = \frac{1}{2}\overline{BC}$.

Să se împartă acest trapez în nouă trapeze egale între ele şi asemenea cu trapezul dat.

O. N. Ţ.

Clasa IV-a. *Exerc. 570.* Intr'un trunchiu de con de raze R, *r* şi înălţime I, fie C mijlocul unei generatoare; se proiectează C pe axă în D şi planul perpendicular în C pe generatoare taie axa în O; avem

$$\overline{OD} = \frac{I}{2} \cdot \frac{R+r}{R-r}.$$

N. M.

IV. 571. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} 3x + 3ay + a^2 = 0 \\ x + 3by + 3b^2 = 0. \end{cases}$$

Să se determine apoi parametrul m, aşa fel încât expresia $y^2 + mx$ să se poată pune sub formă de patrat perfect.

G. D. S.

IV. 572. Un trunchiu de piramidă regulată are bazele patrate, de laturi L şi l, iar apotema egală cu media aritmetică a lui L şi l.

1°. Să se demonstreze că înălţimea trunchiului de piramidă e media geometrică a lui L şi l.

2°. Ce legătură este între volumul şi aria totală a unui astfel de trunchiu de piramidă ?

3°. Se dă aria laterală a trunchiului de piramidă egală cu 169 cm^2 şi înălţimea de 16 cm. Să i se afle volumul.

G. D. S.

IV. 573. Un triunghiu dreptunghiu ABC ($A = 90^0$) are laturile sale exprimate prin numerele :

$$\overline{AB} = 4x - 2 \quad ; \quad \overline{AC} = 3x + 7 \quad ; \quad \overline{BC} = 5x + 3.$$

Să se afle :

1°. Măsura fiecărei laturi (unitatea fiind presupusă 1 m) ;

2°. Suprafaţa născută prin rotirea triunghiului dat în jurul ipotenuzei sale ;

3°. Diferenţa volumelor obţinute prin rotirea triunghiurilor ABD şi ACD (AD fiind înălţimea din A în triunghiul ABC) în jurul lui AD.

V. Gh.

IV. 574. Un triunghiu oarecare ABC are următoarele măsuri :

$$\overline{AB} = 2 \text{ m} \quad ; \quad A = 112^0\,30' \quad ; \quad B = 45^0.$$

Să se calculeze volumul născut prin învârtirea triunghiului în jurul laturei sale $\overline{BC}$.

V. Gh.

IV. 575. Un romb ABCD are diagonalele $\overline{AC}$ şi $\overline{BD}$ respectiv de măsurile $2a$ şi $2b$. Se roteşte triunghiul ADC în jurul diagonalei $\overline{AC}$, până când proiecţia lui OD pe planul ABC este egală cu jumătatea ei (O fiind punctul de întâlnire al diagonalelor) Fie D' această poziţie a vârfului D. Să se calculeze *volumul* şi *suprafaţa* totală a piramidei D'ABC.

O. N. Ţ.

IV. 576. Fie A', B', C' mijloacele laturilor $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$. Indoind planul pe dreptele A'B', B'C', C'A' până când punctele A, B, C se confundă în acelaşi punct S, se formează astfel o piramidă triunghiulară (tetraedru) SA'B'C'. Fie SA", SB", SC" înălţimile feţelor SB'C', SC'A', SA'B'. Să se arate că perpendicularele ridicate în A", B", C" pe B'C', C'A', A'B', în planul A'B'C', se întâlnesc în acelaşi punct.

O. N. Ţ.

IV. 577. Fie piramida triunghiulară SABC, muchia SA fiind perpendiculară pe baza ABC; fie B' şi C' proiecţiile lui A pe muchiile $\overline{SB}$, SC; iar O intersecţia perpendicularelor duse în planul SBC pe muchiile SB, SC respectiv în B' şi C'. Să se arate, că segmentul AO este o înălţime a piramidei triunghiulare SABC. Cunoscând lungimile muchiilor SA, SB, SC, să se calculeze măsura înălţimii AO.

O. N. Ţ.

IV. 578. O rază luminoasă căzând pe oglinda (R) în punctul A se reflectă căzând pe oglinda paralelă (P) sub un unghiu de 60^0 în punctul B. Reflectându-se a doua oară cade pe oglinda (R) în C, apoi reflectându-se din nou cade pe oglinda (P) în punctul D; şi aşa mai departe. Cunoscând că distanţa în linie dreaptă între punctele A şi D este egală cu $2a$, să se calculeze drumul parcurs de lumină între cele două oglinzi paralele (R) şi (P), dela punctul A până la D.

O. N. Ţ.

IV. 579. Avem două lungimi şi un dreptunghiu dat ABCD de lungime b şi înălţime a. Dacă micşorăm una din baze cu *prima* lungime şi cealaltă bază cu *a doua* lungime obţinem un trapez ABMN a cărui arie este cât a dreptunghiului dat mărită cu aria patratului construit pe diferenţa dimensiilor dreptunghiului.

Dacă micşorăm una din laturile înălţime a dreptunghiului cu *prima* lungime şi mărim pe a doua cu *a doua* lungime obţinem alt trapez BCRP a cărui arie este egală cu a patratului construit pe suma dimensiilor dreptunghiului micşorat cu aria dreptunghiului dat.

Să se construiască cele două lungimi.

O. N. Ţ.

Clasa V-a. *Exerc. 675.* Se dă paralelogramul ABCD. Pe mijlocul lui $\overline{AB}$ se ridică o perpendiculară Δ. Cercul cu centrul în B şi cu raza $\overline{BC}$ taie pe Δ în M şi N. Să se demonstreze că MD şi ND sunt înălţimi în triunghiul MCN.

GH. B.

V. 676. Fiind dată ecuaţia

$$x^2 + px + q = 0$$

să se formeze ecuaţia ale cărei rădăcini sunt

$$y_1 = x_1 + \frac{1}{\sqrt{x_2}} \quad \text{şi} \quad y = x_2 + \frac{1}{\sqrt{x_1}}.$$

G. G. C.

V. 677. Să se determine coeficienţii ecuaţiei:

$$ax^8 + bx^7 + cx^6 + dx^5 + ex^4 + dx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

astfel ca ecuaţia în y obţinută prin transformarea

$$y = x + \frac{1}{x}$$

să fie o ecuaţie reciprocă.

G. G. C.

V. 678. Un colecţionar vinde colecţia sa de mărci poştale cu 247 lei. Această colecţie cuprinde cu 9 mărci mai puţine de calitatea I-a decât de calitatea a II-a şi cu 11 mărci mai multe de calitatea a III-a decât de a II-a. O marcă de calitatea I-a costă cu 7 lei mai mult decât o marcă de calitatea a II-a şi cu 8 lei mai mult decât o marcă de calitatea a III-a. Dacă acea colecţie s'ar fi compus numai din mărci de calitatea a II-a, de *patru* ori mai multe decât câte sunt actualmente şi dacă $\frac{3}{4}$ din ele s'ar fi vândut cu acelaşi preţ ca prima dată, iar restul cu 6 lei marca, valoarea colecţiei ar fost de 315 lei.

Câte mărci au fost de fiecare calitate şi care a fost preţul unei mărci din fiecare calitate.

V. GH.

V. 679. Se dau cercurile O_1 şi O_2. Să se construiască un alt cerc O_3, care să treacă prin centrele primelor două şi astfel încât dacă A_1B_1 şi A_2B_2 sunt dreptele care poartă coardele comune ale lui O_3 cu cercurile O_1 şi O_2, dreptele A_1B_1 şi A_2B_2 să se taie după un unghiu dat α.

Să se afle apoi locul punctului M de intersecţie al dreptei A_1B_1 cu A_2B_2, când α variază.

V. GH.

V. 680. Un cerc (O) cu centrul pe un cerc (I) de rază R, taie cercul (I) după o coardă AB de lungime $2a$. Care este raza cercului (O)? Discuţie.

O. N. Ţ.

V. 681. Fiind date două cercuri (O) şi (C) de raze r şi R, tangente exterior în punctul I, unim extremitatea A a razei OA, perpendiculară pe OC, cu punctul C. Dreapta AC taie cercul (O) în B, iar pe (C) în E.

Să se calculeze aria dreptunghiului construit cu $\overline{CB}$ şi $\overline{AE}$ ca dimensii.

O. N. Ţ.

V. 682. Sunt date două cercuri (O) şi (C) tangente exterior în I. Să se construiască un al treilea cerc (L), tangent dreptei OC în punctul O şi care să treacă prin mijlocul M al semicercului determinat în cercul (C) de dreapta OC.

O. N. Ţ.

V. 683. x' şi x'' fiind rădăcinile ecuaţiei

$$x^2 + px + q = 0,$$

să se formeze ecuaţia care să aibă ca rădăcini:

$$X_1 = \left(\frac{1}{x'}\right)^2 + \left(\frac{1}{x'}\right)^3 \; ; \quad X_2 = \left(\frac{1}{x''}\right)^2 + \left(\frac{1}{x''}\right)^3.$$

O. N. Ţ.

V. 684. Să se arate, că ecuaţia:

$$x^8 + x^7 + 5x^6 + 4x^5 + 9x^4 + 4x^3 + 5x^2 + x + 1 = 0,$$

are toate rădăcinile sale imaginare.

O. N. Ţ.

Clasa VI-a. *Exerc. 662.* In trapezul isoscel BCDE se cunoaşte lungimea d a diagonalei BD, unghiul α făcut de ea cu baza $\overline{BC}$ şi perimetrul $2p$.

1°. Să se calculeze suprafaţa trapezului, unghiurile sale şi raza cercului circumscris.

2°. Să se determine condiţia ca trapezul să fie şi circumscriptibil.

3°. Cum se modifică rezultatele în acest caz?

4°. Să se arate că dreapta punctelor de contact MM′ trece prin intersecţia diagonalelor şi să se calculeze lungimea ei.

5°. Să se determine valoarea unghiului B astfel ca ariile triunghiurilor AED şi BIE să fie în raportul 2/3, punctele A şi I fiind respectiv intersecţiile dreptelor (BE, CD) şi (BD, EC).

G. G. C.

VI. 663. Se dau: un plan (P), un cerc (C) în acest plan şi un punct M mobil în spaţiu. Fie M′ proiecţia lui M pe planul (P). Ştiind că tangentele duse din M′ la cercul (C) au lungimea constantă, să se afle locul geometric al punctului M.

V. Gh.

VI. 664. Se dă un patrat ABCD de latură a şi un punct P pe prelungirea diagonalei BD, astfel ca $\overline{DP} = l$. Prin P se duce o secantă PQR întâlnind pe DA în Q şi pe AB în R. Să se determine unghiul $PQD = \alpha$ astfel ca să avem:

$$\overline{PQ} = \frac{m}{n}\overline{QR}.$$

Caz particular: $l = a$.

O. N. Ţ.

VI. 665. Pe un plan (P) este ridicată o perpendiculară OA. Să se determine unghiul α astfel ca, dacă ducem oblicele $\overline{AB}$ şi $\overline{AC}$ la planul (P) făcând cu acest plan unghiurile 3α şi 2α, să avem:

$$\overline{OB} = k \cdot \overline{OC}.$$

Discuţie.

O. N. Ţ.

VI. 666. Intr'o sferă de rază R să se înscrie un con de rotaţie cu unghiul de deschidere $\alpha = 22°30'$. Să se calculeze perimetrul triunghiului de secţiune făcut în con printr'un plan trecând prin axa lui.

O. N. Ţ.

VI. 667. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sqrt{(7+3\cos x)(7+5\cos x)} - \sqrt{(7-3\cos x)(7-5\cos x)} = 7.$$

C. I. Ţ.

VI. 668. Dacă a şi b sunt arce cuprinse între zero şi $\frac{\pi}{4}$, avem:

$$\frac{1}{2}(\operatorname{cosec} a + \operatorname{cosec} b) < 1 + \operatorname{cotg} a + \operatorname{cotg} b.$$

C. I. Ţ.

VI. 669. Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$\cos x \cos y = a + \frac{1}{a} \quad \text{şi} \quad \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = a^2.$$

C. I. Ţ.

VI. 670. Un dreptunghiu ABCD are $\overline{BC} = 2a$, $\overline{CD} = 2b$. Se consideră cercul tangent dreptelor AB, BC, CD cu centrul în interiorul dreptunghiului şi DE tangenta dusă din D la cerc.

Să se afle valoarea expresiei

$$\operatorname{tg}\alpha + \sin 2\alpha,$$

dacă s'a notat $\sphericalangle CDE = \alpha$.

C. I. B.

VI. 671. Un pentagon regulat are perimetrul $5a$. Să se calculeze suma diagonalelor pentagonului.

C. I. B.

VI. 672. Un patrat ABCD are latura a. Luăm pe AB punctul E, iar pe AD punctul F astfel ca: $\overline{AE} = b$, $\overline{AF} = c$. Dacă se notează $\beta = \sphericalangle BCE$, $\alpha = \sphericalangle ECF$, $\gamma = \sphericalangle FCD$, să se calculeze

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+\gamma) + \sin(\beta+\gamma).$$

C. I. B.

Clasa VII-a. *Exerc. 579.* Să se studieze variaţia funcţiei

$$y = (a-x)\sqrt{x(b-x)}$$

şi să i se construiască curba reprezentativă.

Gh. B.

VII. 580. Intr'un triunghiu dat să se înscrie un triunghiu echilateral de arie maximă.

G. G. C.

VII. 581. Să se efectueze desvoltarea

$$(a+b+c)^9$$

şi să se determine cea mai simplă expresie echivalentă a sumii

$$a^9+b^9+c^9$$

cu ipoteza că $a+b+c=0.$

G. G. C.

VII. 582. Să se studieze variaţia funcţiei:

$$y=2^{\frac{1}{\sin x}}$$

şi să se reprezinte grafic. Generalizare.

G. D. S.

VII. 583. Dacă notăm cu $f(t)$ o funcţie continuă de variabilă t, să se demonstreze, că, în general, tangentele în punctele de abscisă

$$x=2k\pi\pm\frac{\pi}{2}$$

la curbele

$$y=\frac{f(\sin x+\cos x)}{\sin x-\cos x} \quad \text{şi} \quad Y=\frac{f(\sin x-\cos x)}{\sin x+\cos x}$$

formează împreună cu axa OX un triunghiu isoscel a cărui înălţime este chiar ordonata corespunzătoare abscisei date.

In particular, dacă $f(t)=L(t)$ curbele sunt ortogonale.

Mai sunt valabile toate abscisele date?

G. D. S.

VII. 584. Să se arate că:

$$\left(\sqrt{5-\sqrt{5}}+i\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^{15}\left[\sqrt{2+\sqrt{3}}.(1-i)+\right.$$

$$\left.+\sqrt{2-\sqrt{3}}.(1+i)\right]^{15}=2^{45}.$$

C. I. Ţ.

VII. 585. Să se reprezinte funcţiunea:

$$y^2 - 5xy + 6 = 0.$$

C. I. B.

VII. 586. Se dă un dreptunghiu ABCD. O paralelă dusă dreptei AB, taie dreptele AD, BC respectiv în E, F. Se consideră cercul tangent la trei din laturile patrulaterului ABFE şi interior patrulaterului.

Să se studieze variaţia ariei cercului când punctul F descrie segmentul BC.

C. I. B.

VII. 587. Două mobile M şi M' se mişcă pe o dreaptă, cu următoarele ecuaţii:

$$s = 3t^2 - 5t + 3$$

$$s = -5t^2 + 3t - 5.$$

Să se calculeze variaţia diferenţei de viteză a celor două mobile.

C. I. B.

VII. 588. Se dă un dreptunghiu ABCD. Un mobil pleacă din A şi parcurge perimetrul dreptunghiului, spaţiul străbătut pe fiecare latură este proporţional cu patratul timpului necesar spre a străbate latura. Să se afle după cât timp mobilul a parcurs perimetrul.

C. I. B.

Clasa VIII-a. *Exerc. 466.* Să se scrie ecuaţia patratică a bisectoarelor unghiului dreptelor

$$y = m(x + a) \quad \text{şi} \quad y = n(x - a).$$

GH. B.

VIII. 467. Să se pună sub forma unui produs de cinci factori de gradul întâi, suma

$$\Sigma\, x(y^2 - z^2)(y^2 + z^2 - a^2).$$

GH. B.

VIII. 468. Să se studieze natura rădăcinilor ecuației

$$12x^6 - 40x^5 - 39x^4 + 170\lambda^3x^3 - 39x^2 - 40x + 12 = 0$$

pentru toate valorile parametrului λ și să se rezolve ecuația în cazul particular $\lambda = \pm 1$.

G. G. C.

VIII. 469. Diametrul AB al unui semicerc face cu axul *xy*, din planul său, unghiul α. Notând cu *d* distanța dela mijlocul O a lui $\overline{AB}$ până la axul *xy*, să se afle volumul născut prin rotirea semicercului în jurul acestui ax.

Fiind dat *d*, se poate determina α astfel ca volumul de mai sus să fie egal cu al sferii cu raza cât raza semicercului dat?

G. D. S.

VIII. 470. Se consideră un segment de parabolă cuprins între vârf și coarda $\overline{AB}$ perpendiculară pe axa de simetrie.

Se rotește acest segment de parabolă:

a) în jurul axei de simetrie;

b) în jurul coardei $\overline{AB}$.

Să se afle în ambele cazuri volumul corpului născut.

G. D. S.

VIII. 471. Se dă elipsa, raportată la axele ei, pentru care $c = \frac{a}{2}$ și parabola cu vârful în origină, având focarul F comun cu elipsa.

1°. Fie $\overline{OM}$ un diametru al elipsei. Să se afle locul geometric, (C), al intersecției diametrului conjugat lui OM față de elipsă, cu tangenta la parabolă, paralelă cu OM.

2°. Să se reprezinte grafic curba loc geometric (C).

3°. Prin F se duce o dreaptă variabilă. In câte puncte reale taie această dreaptă variabilă curba (C)?

Aplicație pentru dreaptă de coeficient unghiular $m = \frac{9\sqrt{3}}{11}$.

G. D. S.

VIII. 472. Să se afle numărul de rădăcini reale ale ecuației:

$$\cos^2 x - (1 + x^2)\cos x - 2 = 0$$

și să se calculeze cu două zecimale exacte.

G. D. S.

VIII. 473. Se consideră parabola tangentă axei $x'x$ în origină, având axa Oy axă de simetrie și trecând prin punctul A(4, 2). O dreaptă variabilă dusă prin focarul parabolei, o întâlnește în M, N.

a) Să se studieze variația ariei triunghiului OMN.

b) Să se afle locul geometric al ortocentrului acestui triunghiu

C. I. B.

VIII. 474. Să se scrie ecuația parabolei care admite ca axă de simetrie bisectoarea unghiului xoy, are focarul în punctul F(4, 4) și trece prin origina axelor de cordonate.

Ce devine această ecuație când se va face o translație a axelor, luând ca nouă origină punctul F^2?

C. I. B.

VIII. 475. Se dau cercurile:

$$(c)\quad x^2 + y^2 = 25$$
$$(c_1)\quad x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$$
$$(c_2)\quad x^2 + y^2 + x - 7y - 1 = 0.$$

a) Să se afle coordonatele centrului lor radical.

b) Să se scrie ecuația cercului circumscris triunghiului format de centrele cercurilor.

C. I. B.

Exerciții generale. *E. G. 364.* Dacă unui cub perfect îi scădem *unu*, putem obține dublul unui număr prim de două cifre?

I. L.

E. G. 365. Pentru care cub perfect rădăcina lui este egală cu a 20-a parte a ei, plus 50?

I. L.

E. G. 366. Dacă din cifrele unui număr de trei cifre scris în sistemul zecimal, scădem un număr n, putem obține același număr de trei cifre scris în sistemul cu baza 9?

I. L.

E. G. 367. In ce caz numărul

$$N = 13^n + (-2)^n + (-11)^n$$

se împarte exact prin 147, fără să se împartă cu 286 sau viceversa?

I. L.

E. G. 368. Ştiind că avem $a+b+c=1$, să se calculeze valoarea expresiei:

$$E \equiv \left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}\right) \cdot \left(\frac{c}{a-b} + \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a}\right).$$

I. L.

E. G. 369. Să se arate, că dacă avem:

$$a+b+c=0,$$

atunci $a^{2n+1} + b^{2n+1} + c^{2n+1}$ se împarte exact cu $a^3 + b^3 + c^3$.

I. L.

E. G. 370. Ştiind că avem:

$$a+b+c=0,$$

în ce caz $a^n + b^n + c^n$ se împarte exact cu $(a+b)(b+c)(c+a)$?

I. L.

E. G. 371. Să se arate că expresiunea:

$$E = n^2(6n^{10} - 21n^9 - 10n^8 + 56n^7 + 4n^6 - 14n^5 - 41n^4 + 24n^2 - 4)$$

este divizibilă cu 5040, n fiind un întreg oarecare.

C. I. Ţ.

E. G. 372. Să se arate că expresiunea

$$E = 3668^n + 4046^{2n+1}$$

este divizibilă cu 38.

C. I. B.

E. G. 373. Să se arate că A, B fiind două numere pare sau impare consecutive, a căror medie aritmetică este multiplu de 5, suma cuburilor lor este divizibilă cu 10.

C. I. B.

INSTRUCȚIUNI

a) Soluțiile exercițiilor se vor scrie cu cerneală, pe sferturi de coală și numai pe o parte a foii.

Dacă va fi nevoie de mai multe foi pentru soluționarea unui exercițiu, ele se vor coase sau lipi în partea stângă. Figurile, ce vor fi necesare pentru urmărirea exercițiului se vor construi îngrijit, pe foi aparte, având formatul arătat mai sus și se vor coase sau lipi odată cu soluția.

Nu se vor trimite soluțiile mai multor exerciții pe aceeași foaie.

b) Redactarea soluțiilor se va face astfel:

Sus, se va scrie numărul exercițiului, dedesubt enunțul astfel cum e publicat în revistă, cu inițialele propunătorului, apoi soluția clar compusă, iar la sfârșit, iscălitura rezolvitorului în ordinea următoare:

Numele de botez complet, inițiala părintelui, numele de familie, însoțit de clasa și școala pe care o urmează.

c) Nu se vor lua în considerare soluțiile iscălite de 2 sau mai mulți corespondenți, nici soluțiile exercițiilor propuse la clase inferioare aceleia în care corespondentul se află. Pentru redijarea soluțiilor se pot vedea indicațiile din Nr. 1, Vol. IV.

d) Soluțiile se primesc timp de 3 luni dela propunerea exercițiului, numai dela abonații „Suplimentului cu Exerciții" al Gazetei Matematice, pe adresa Locot. C. D. Ionescu-Țiu, Casa Gazeta Matematică, Calea Griviței 158, București 2.

Drepturile de reproducere rezervate Societății «Gazeta Matematică».

Elevii claselor VI, VII și VIII, cu bogată activitate la această revistă își pot lărgi cadrul activității soluționând probleme din „Gazeta Matematică".

In Biblioteca „Gazetei Matematice" au apărut și se găsesc la adresa indicată mai sus, următoarele:

III. **N. Abramescu,** Lecțiuni elementare de Algebră superioară, pentru clasa VIII-a științifică, Ediția VI-a . . . . . Lei 120

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și G. Țițeica,** Vocabular Matematic . . . . . Lei 20

X. **G. Țițeica,** Culegere de Probleme de Geometrie . . . . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. Istoric, învățăminte. Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 200 / pentru abonații G. M. și S. G. M. . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I. (Goniometrie) revăzută și adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** Culegere de Probleme de Aritmetică. Partea I. Aritmetica rațională . . . . . Lei 190

XIV. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I-a. (Trigonometrie plană). Ediția II-a revăzută și adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

XV. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea I. Ediția IV-a revăzută și mărită . . . . . Lei 120

XVI. **G. Țițeica,** Culegere de Probleme de Geometrie Analitică. Partea I. Ediția II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 140

XVII. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea II-a. Ediția IV-a, revăzută și mărită . . . . . Lei 240

Biblioteca Istorică a GAZETEI MATEMATICE

1. Elementele lui **Euclid.** (Cărțile I — VI de Geometrie plană) tradusă din limba greacă de *V. Marian* . . . . . Lei 160

Suplimentul cu Exerciții. Abonamentul anual (9 numere) . . Lei 50

„Gazeta Matematică" apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plătește înainte și începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele și toată corespondența se trimite pe adresa:

Societății „GAZETA MATEMATICĂ"

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviței No. 158. — București 2.

(Telefon: 3-9803).

M. O., IMPRIMERIA NAȚIONALĂ — C. 69 828

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL VII. No. 8 1 MAI 1941

BIBLIOTECA CENTRALĂ
„ASOCIAȚIUNII"
SIBIIU

SOCIETATEA GAZETA MATEMATICĂ
CALEA GRIVIŢEI, 158. BUCUREŞTI 2. — TELEFON 3-9803

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL VII. No. 8 — 1 MAI 1941

ABONAMENTUL LEI 50 PE AN (9 numere)

Soluţii şi orice corespondenţă pe adresa:

Locot. C. D. IONESCU-ŢIU

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviţei 158. — Bucureşti 2

EXERCIŢII REZOLVATE

Clasa III-a. *Exerc. 143. Să se construiască un romb* ABCD *cunoscând diagonala sa* $\overline{AC}$, *în mărime şi poziţie, precum şi poziţia unui punct* M *de pe una din laturile rombului.*

V. GH.

Ducem a doua diagonală, perpendiculară pe $\overline{AC}$ la mijlocul ei, O. Unim pe A sau pe C cu M şi prelungim până la intersecţia cu diagonala a doua. Obţinem astfel vârful B_1 sau B_2 al rombului. Al patrulea vârf este D_1 sau D_2, simetricul lui B_1 sau B_2 în raport cu O. In general, în condiţiunile enunţului, ies două romburi AB_1CD_1 şi AB_2CD_2. Un singur romb ne iese dacă M se află pe diagonala a doua. Nu căpătăm nici o soluţie dacă M se află pe $\overline{AC}$, pe prelungirile lui $\overline{AC}$ sau pe perpendicularele în A sau C pe $\overline{AC}$.

Clasa IV-a. *Exerc. 511. Desemnaţi un triunghiu* ABC. *Construiţi în interiorul său un punct* M *astfel încât*

$$\text{aria MBC} = \frac{1}{2}\text{aria MCA} = \frac{1}{3}\text{aria MAB}.$$

V. GH.

Rezultă:

$$\text{aria MBC} = \frac{1}{6}\text{aria ABC}$$

$$\text{aria MAB} = \frac{1}{2}\text{aria ABC}.$$

Deci $\overline{AA'}$ şi $\overline{CC'}$ fiind înălţimi, punctul căutat M se găseşte la intersecţia paralelei dusă la $\overline{BC}$ la o distanţă de $\overline{BC}$ cât $\frac{1}{6}\overline{AA'}$, cu paralela la $\overline{AB}$ la distanţă cât $\frac{1}{2}\overline{CC'}$.

Clasa V-a. *Exerc. 611. Se dă un punct* O *în plan şi se consideră unghiurile* u, $2u$, $3u$,... *cu vârful în* O *adiacente, consecutive, luate în acelaşi sens. Să se determine unghiul* u *astfel încât o pereche din aceste unghiuri să fie adiacente complimentare.*

V. GH.

n fiind un număr întreg, trebue să avem

$$(n+1)u + nu = 90^0$$

$$u = \frac{90^0}{2n+1}.$$

Divizorii întregi şi neperechi ai lui 90 sunt:

$$2n+1 = 1;\ 3;\ 5;\ 9;\ 15;\ 45.$$

Rezultă respectiv:

$$n = 0;\ 1;\ 2;\ 4;\ 7;\ 22$$

$$u = 90^0;\ 30^0;\ 18^0;\ 10^0;\ 6^0;\ 2^0$$

$$0^0 + 90^0 = 30^0 + 60^0 = 36^0 + 54^0 = 40^0 + 50^0 = 42^0 + 48^0 =$$
$$= 44^0 + 46^0 \equiv 90^0.$$

Clasa VII-a. *Exerc. 537. Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z+1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \alpha\Delta \quad ; \quad \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z+1 \\ x+a & y+b & z+c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \beta\Delta$$

$$\begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z+1 \\ x+a & y+b & z+c \\ x+a^2 & y+b^2 & z+c^2 \end{vmatrix} = \gamma\Delta,$$

unde Δ *este determinantul* VANDERMONDE *de ordinul al III-lea.*

Caz particular

$$\alpha = 1 \quad , \quad \beta = \gamma = 2.$$

Verificare pentru cazul particular.

G. D. S.

Desvoltând determinanții din enunț, obținem sistemul:

$$\begin{aligned}
\Sigma\ bc\,(b-c)\,x &= (1-\alpha)\,\Delta \\
\Sigma\,(bc-b-c)\,(b-c)\,x &= (1-\beta)\,\Delta \\
\Sigma\,(b-1)\,(c-1)\,(b-c)\,x &= (1-\gamma)\,\Delta.
\end{aligned}$$

Aplicăm regula lui CRAMER. Să notăm cu D numitorul și cu D_x, D_y, D_z numărătorii lui x, y, z. Găsim:

$$D = (a-b)(b-c)(c-a)\begin{vmatrix} bc & ca & ab \\ bc-b-c & ca-c-a & ab-a-b \\ bc-b-c+1 & ca-c-a+1 & ab-a-b+1 \end{vmatrix}$$

$$= -(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$$

$$\therefore \qquad (1)\quad D = -\Delta^2.$$

$$D_x = \Delta(c-a)(a-b)\begin{vmatrix} 1-\alpha & ca & ab \\ 1-\beta & ca-c-a & ab-a-b \\ 1-\gamma & ca-c-a+1 & ab-a-b+1 \end{vmatrix}$$

$$= \Delta(c-a)(a-b)\begin{vmatrix} 1-\alpha & ca & ab \\ \alpha-\beta & -(c+a) & -(a+b) \\ \alpha-\gamma & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Scăzând coloana II-a din a treia și scoțând factor pe $(b-c)$ avem:

$$= \Delta(c-a)(a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 1-\alpha & ca & a \\ \alpha-\beta & -(c+a) & -1 \\ \beta-\gamma & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \Delta^2\begin{vmatrix} 1-\alpha & 0 & a \\ \alpha-\beta & -a & -1 \\ \beta-\gamma & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \quad D_x = \Delta^2[1+(a-1)\,\alpha + a(a-1)\,\beta - a^2\gamma].$$

Rezultă:

$$\begin{aligned}
x &= a^2\gamma - a(a-1)\,\beta - (a-1)\,\alpha - 1 \quad \text{și analog:} \\
y &= b^2\gamma - b(b-1)\,\beta - (b-1)\,\alpha - 1 \\
z &= c^2\gamma - c(c-1)\,\beta - (c-1)\,\alpha - 1.
\end{aligned}$$

Caz particular:

$$x = a \quad ; \quad y = b \quad ; \quad z = c.$$

Verificarea e un exercițiu simplu asupra proprietăților determinanților.

Exerciţii generale. *Exerc. 335. Pentru ce valori întregi ale numerelor* N *şi* n, *suma*

$$S = N(N+1) + n$$

se divide prin 9?

GH. B.

Faţă de divizorul 9, numerele N, S şi apoi n pentru ca S să se dividă prin 9 sunt date în tabloul următor:

N	S	$\therefore$
$9m$	$9p + n$	$\therefore\ n = 9s$
$9m + 1$	$9p + 2 + n$	$\therefore\ n = 9s - 2$
$9m + 2$	$9p + 6 + n$	$\therefore\ n = 9s + 3$
$9m + 3$	$9p + 3 + n$	$\therefore\ n = 9s - 3$
$9m + 4$	$9p + 2 + n$	$\therefore\ n = 9s - 2$
$9m - 4$	$9p + 3 + n$	$\therefore\ n = 9s - 3$
$9m - 3$	$9p + 6 + n$	$\therefore\ n = 9s + 3$
$9m - 2$	$9p + 2 + n$	$\therefore\ n = 9s - 2$
$9m - 1$	$9p + n$	$\therefore\ n = 9s$

E. G. 336. Numărul 46 este scris în baza de numeraţie 11. Să i se găsească patratul în această bază.

GH. B.

Numărul 46 din baza 11 devine în baza 10:

$$4 \cdot 11^1 + 6 \cdot 11^0 = 44 + 6 = 50.$$

Patratul lui 50 din baza 10 devine în baza 11 numărul 1973. In adevăr, ţinând seamă că

$$11^0 = 1 \ ; \ 11^1 = 11 \ ; \ 11^2 = 121 \ ; \ 11^3 = 1331.$$

Se găsesc după cum urmează cifrele lui $50^2 = 2500$, în baza 11

$$\begin{array}{r} 2500 : 1331 = 1 \\ 1331 \\ \hline 1169 : \ 121 = 9 \\ 1089 \\ \hline 80 : \ 11 = 7 \\ 77 \\ \hline 3 : \ 1 = 3. \end{array}$$

E. G. 337. La câți din abonații la telefonul din București, numărul telefonului ar putea avea pe 25 ca sumă a cifrelor. Numărul telefonului unui abonat din București este un număr de 5 cifre care începe cu 1, 2, 3, 4 sau 5.

GH. B.

Problema revine la a găsi numărul *abcde* așa încât

(1) $$a+b+c+d+e=25$$

unde a are una din valorile 1, 2, 3, 4 sau 5.

Fie $a=1$. Din (1) rezultă că

(2) $$b+c+d+e=24.$$

In (2) fac pe rând $b=0, 1, 2, \ldots, 9$. Pentru $b=0$, din (2) se deduce

(3) $$c+d+e=24.$$

In (3) $d+e\leqslant 18$ $\therefore$ $b\leqslant c$. Dau lui c în (3) valorile pe care le poate avea și găsesc următorul tabel de valori

c	$d+e$	d	e
6	18	9	9
7	17	9 8	8 9
8	16	9 8 7	7 8 9
9	15	9 8 7 6	6 7 8 9

Deci pentru $a=1$ și $b=0$ avem următoarele 10 soluții

10699; 10798; 10789; 10897; 10888;

10879; 10996; 10987; 10978; 10969.

La fel se găsesc soluțiile pentru celelalte valori ale lui a și b.

E. G. 342. Cum se poate dovedi că numărul :

191561942608236107294793378082303638130997327548169216

care cuprinde 54 *cifre, este un număr perfect par?*

I. L.

Trebue să avem:

$$10^{53} \leqslant 2^n \cdot (2^{n+1} - 1) < 10^{54}.$$

Admiţând că: $5 = 2^{2,32\cdots}$, atunci:

$$2^{169} \leqslant 2^n \cdot (2^{n+1} - 1) \leqslant 2^{179}.$$

Deasemenea, luând:

$$2^{n+1} - 1 \lesssim 2^n$$

avem:

$$85 < n < 89.$$

Rămâne să încercăm valorile

$$n = 86,\ 87 \text{ şi } 88$$

şi constatăm că $n = 88$ convine.

Dar mai rămâne să constatăm deasemenea dacă numărul:

$$2^{n+1} - 1 = 2^{89} - 1$$

$$= 618 \cdot 970 \cdot 019 \cdot 642 \cdot 690 \cdot 137 \cdot 449 \cdot 562 \cdot 111$$

este prim absolut.

Aceasta se poate constata numai prin împărţiri directe ale numărului cu numerile prime absolut, mai mici ca:

$$2^{45} = 17 \cdot 592 \cdot 186 \cdot 044 \cdot 416$$

ceea ce ar implica o tabelă de numere prime până la această cifră.

Faptul fiindu-ne imposibil, din lipsa unui tabel de numere prime, aşa de mare, ne-am mărginit a afirma că numărul de mai sus este prim absolut deoarece aşa l'am găsit într'o revistă.

Până la 10 Aprilie s'au primit soluții bune la exercițiile publicate în numerele 5, 6, 7 anul VII, dela [1]):

Liceul de fete „Carmen-Sylva", București.

Clasa III-a: Kogălniceanu M. Olga (III: 157).
Clasa V-a: Mateescu C. Virginia (V: 646).
Clasa VI-a: Epure C. Marilena (VI: 633, 4, 50).

Școala Centrală de fete, București.

Clasa VII-a: Agapie G. Elena (VII: 574).

Institutul Ortodox Internat, București.

Clasa IV-a: Mateescu P. Mihaela (IV: 656).

Liceul de fete „Oltea Doamna", Iași.

Clasa III-a: Andreian Cabiria (III: 157).
Clasa VII-a: Constantinescu N. Brânduța (VII: 562, 70), Ionescu C. Elena (VII: 570), Popovici I. Florica (VII: 549).

Liceul de fete „Despina Doamna", Ploești.

Clasa V-a: Boca C. Stelica (V: 645*, 68, 9).

Colegiul Național „Sf. Sava", București.

Clasa IV-a: Ionescu N. G. (IV: 530).
Clasa V-a: Bâlcu St. N. (V: 646), Stănescu G. P. (V: 646).
Clasa VI-a: Hristescu G. T. (VI: 629, 31), Petrescu St. (VI: 624), Ștefănescu Priboiu St. F. (VI: 631), Stoica V. V. (VI: 631).
Clasa VII-a: Burcherea I. C. (VII: 557), Ghemușlui G. (VII: 555, 7), Ionescu G. (VII: 551, 5), Nadolu C. G. (VII: 546, 51, 7), Pappia M. C. (VII: 574), Sclavu D. (VII: 542, 9, 57, 8).

Liceul „Gh. Lazăr", București.

Clasa V-a: Alevra G. C. (V: 668), Brânceni B. (V: 667, 67*, 3*), Timotin A. A. (V: 645, 9, 53, 71*, 2, 3*, E. G.: 336).

Liceul „Aurel Vlaicu", București.

Clasa III-a: Barbaiani A. M. (III: 153*, 4*, 5*, 6, 7), Leon A. M. (III: 153*, 4, 7).
Clasa VI-a: Barbaiani A. I. (E. G: 335, 6), Buga I. M. (E. G.: 336), Davidescu M. A. (E. G.: 336), Mănescu G. I. (VII: 570).

---

1) Semnul * însoțește numărul unui exercițiu rezolvat foarte bine.

Clasa VII-a: Calmuschi G. I. (VII: 546, 9, 78), Mănescu G. I. (VII: 542, 9, 55, 60, 2, 5), Popescu G. T. (VII: 535, 43, 6).

Clasa VIII-a: Buga I. M. (VIII: 434, 40, 1, 2, 3, 4, E. G.: 338, 9, 40), Barbaiani A. I. (VIII: 434*, 40, 1, 2, 3, 4, 5, E. G.: 329, 38, 9, 40), Davidescu A. (VIII: 440, 1, 2, 3, 4, 5, E. G.: 338, 9, 40), Duinea A. (VIII: 442, 3, 4, 5).

Liceul „Matei Basarab", București.

Clasa III-a: Costin A. (III: 150, 2).

Liceul „Gh. Șincai", București.

Clasa VI-a: Constantinescu E. (VI: 629*, 31, 6).

Clasa VIII-a: Anghel T. (VIII: 434, 40, 1, 2, 3, 4).

Liceul „Titu Maiorescu", București.

Clasa VI-a: Marinescu I. V. (VII: 550, 1, 4, 5, 6, 8).

Clasa VII-a: Seni C. (E. G.: 342).

Clasa VIII-a: Bugaievski S. E. (VIII: 442, 5, 55), Dăscălescu S. M. (VIII: 447).

Liceul „Marele Voevod Mihai", București.

Clasa V-a: Avramescu D. (V: 636, 40, 2, 55).

Clasa VIII-a: Popescu F. (VIII: 434, 55, 64, 5).

Liceul „Mihai Viteazul", București.

Clasa V-a: Ionescu G. I. (V: 668).

Clasa VI-a: Brătescu D. C. (VI: 650), Udrea G. I. (VI: 631, 50).

Clasa VIII-a: Pelcudi S. C. (VIII: 450, E. G.: 340), Ștefănescu S. D. (VIII: 448), Vernescu V. P. (VIII: 461).

Liceul „Cantemir Vodă", București.

Clasa IV-a: Fințescu I. N. (IV: 530).

Liceul „Spiru Haret", București.

Clasa VIII-a: Negrescu C. I. (VIII: 447, 8).

Institutul „Schewitz-Thierrin", București.

Clasa VIII-a: Kehaian S. Z. (VIII: 447, 51), Mărgărit N. (VIII: 444, 5, E. G.: 334).

Liceul „Sf. Andrei" București.

Clasa VII-a: Ganea M. (VII: 542, 55, 9, 65, 70).

Liceul „Moise Nicoară", Arad.

Clasa VI-a: Popa T. T. (VI: 630, 1, 8, 46, 40, VIII: 446).

Elev particular, Arad.

Clasa VI-a: Nistor I. I. (VI: 629, 33).

Liceul „Ion Meşotă", Braşov.

Clasa V-a: Nistor V. H. (V: 648, 65).

Clasa VI-a: Fabrică S. (VI: 650), Georgescu M. (VI: 619, 31, 49, 50), Negrea G. D. (VI: 639, 50), Voinea I. (VI: 631).

Clasa VIII-a: Cristea S. L. (VIII: 547*).

Liceul „Ştirbei Vodă", Călăraşi.

Clasa IV-a: Nicolaescu T. V. (IV: 530).

Clasa VI-a: Dima N. S. (VI: 631), Rădulescu V. N. (VI: 612), Stoenescu R. I. (VI: 631).

Clasa VII-a: Rădulescu G. G. (VII: 659, 61, 3).

Clasa VIII-a: Ionescu N. V. (VIII: 412, 75).

Liceul militar „Ştefan cel Mare", Câmpu-Lung Muscel

Clasa IV-a: Roman C. V. (IV: 561).

Clasa V-a: Chifu N. Emil (V: 656, 65), Nicolaescu T. I. (V: 656, 65), Popescu N. (V: 665), Ranca C. (656), Staicu C. (V: 655, 6, 65), Ţăranu G. S. (V: 665), Teodorescu Gh. Al. (V: 656, 65).

Clasa VII-a: Adam N. (VII: 542, 3), Bărbuţ T. (VII: 542, 3, 4, 6, 9, 51, 3, 5, 7, 61, 2, 70, VIII: 446), Conlea V. I. (VII: 542), Diaconescu V. C. (VII: 542, 6, 55), Georgescu N. (VII: 542, 3), Ivan D. Horia (VII: 542, 3), Jipa C. N. (VII: 542), Mircea G. (VII: 562), Topârceanu G. (VII: 561, 2), Vlădescu Gh. (VII: 542, 3), Vişan T. (VII: 542, 3, 6), Zovati C. C. (VII: 546, 9, 51, 5, 7, 60, 1, 2).

Clasa VIII-a: Dumitrescu C. (VIII: 443, 4, 6), Popescu M. (VIII: 446), Săbăreanu G. (VIII: 464).

Liceul „Ioniţă Assan", Caracal.

Clasa VII-a: Crăciuneanu Gh. C. (VII: 542), Dobrescu T. G. (VII: 542), Musceleanu I. (VII: 546, 9, 57, 60, 1, 2, 3, 6, 7, E. G.: 336), Muşceleanu D. (VII: 549, E. G.: 341).

Liceul „Mircea cel Bătrân", Constanţa.

Clasa VII-a: Sotiriu H. T. (VII: 549).

Liceul „Fraţii Buzeşti", Craiova.

Clasa VIII-a: Voinea P. Radu (VIII: 442, 3, 5, 41, 2, 56*, 7*, 61, 2).

Colegiul Naţional „Carol I", Craiova.

Clasa VI-a: Ionescu P. R. (VI: 599).

Liceul „D. B. Ştirbey", Câmpina.

Clasa VI-a: Rădulescu N. N. (VI: 612, 31).

Liceul Militar „D. A. Sturdza", Craiova.

Clasa IV-a: Anţica I. Gh. (IV: 530, 1, 44, 7), Angheloiu I. I. (IV: 530, 1, 44, 7), Cârstea D. M. (IV: 530, 1, 42, 4, 5, 7, 53), Dediu M. Şt. (IV: 530, 1, 42, 4, 5, 7, 53), Demetrescu M. M. (IV: 530 1, 42, 4), Demetrescu P. I. (IV: 530, 1, 44, 5, 7, 53), Dumitriu I. S. (IV: 531), Ghinţei A. Gh. (IV: 530, 1, 42, 4, 5, 7, 53), Gogoaşe Sever (IV: 530, 1, 42, 4, 5, 7), Hurezeanu Gh. M. (IV: 530, 42, 4, 5, 7), Ilie C. Gh. (IV: 530, 1, 42, 5, 7, 53), Isfan Al. (IV: 530, 1, 47), Ionescu I. N. (IV: 530, 44), Mavrodin Şt. V. (IV: 530, 1, 47), Nicolicioiu D. (IV: 530, 1, 44), Onţică I. G. (IV: 542, 4, 7), Popa Al. N. (IV: 530, 1, 42, 4, 5, 7, 53), Popescu V. A. (IV: 530, 1, 47), Popescu Gh. I. (IV: 530, 1, 47), Rusu Şt. N. (IV: 530, 1, 44, 5, 7), Săvulescu E. V. (IV: 530, 1), Stoian P. I. (IV: 530, 1), Uhmet V. (IV: 530, 1, 2, 47).

Clasa VI-a: Bădescu F. (E. G.: 394).

Clasa VII-a: Bălănescu M. (VII: 549, 59), Bărbuceanu V. V. (VII: 549, 51, 3), Cercel C. (VII: 556, 9), Constantinescu D. I. (VII: 542, 9, 56, 9, E. G.: 338, 48), Crăciun I. E. (VII: 557, 9, E. G.: 341), Diacon Al. (VII: 542, 9, 51, 36, 9, 62, 6, 74, E. G.: 338, 9, 40, 1, 7, 9), Diaconu D. Aurel (VII: 542), Dinculescu A. (VII: 556, 9, E. G.: 341), Georgescu F. F. (VII: 542*, 59*, 74), Grobowski R. J. (VII: 559, 74, E. G.: 341), Grecianu C. C. (VII: 559, 74), Iancia S. V. (VII: 542, 49, 59), Iliescu V. R. D. (VII: 559), Jianu N. (VII: 559), Mateescu A. (VII: 549, 56, 9, 61, 2, 7, 67, 74, E. G.: 339, 47, 9), Mateescu D. C. (VII: 542, E. G.: 341), Morait Roman I. (VII: 556), Movanu P. (VII: 542, 3, 9, 56, 9, 74), E. G.: 341), Mihai Nicolae (VII: 542, 59, 74), Negrilă T. (VII: 542, 3, 9, 59, 74, E. G.: 341), Paşoi N. D. (VII: 542, 49, 51, 4, 60, 1, 2, 6, 74, E. G.: 338, 9, 40, 1, 7, 8, 9), Popa P. E. (VII: 542, 9, 56, E. G.: 341), Popescu Gh. Gh. (VII: 559, E. G.: 341), Popescu I. M. (VII: 559, 74, E. G.: 341), Popescu D. V. (VII: 549, E. G.: 341, 9), Popescu I. V. (VII: 542, 59, 74), Radu C. I. (VII: 539, 43, 59), Savin I. R. (VII: 542), Şerban M. P. (VII: 542, 9, 59, 74), Ştefănescu M. (VII: 549, 59, E. G.: 341), Tuta Steluţă (VII: 559, E. G. 341), Vâlceanu Radu (VII: 542, 59).

Clasa VIII-a: Balaban A. (VIII: 419, 21, E. G.: 347), Catulescu D. E. (VIII: 440), Coşa A. (E. G.: 347), Ionescu I. A. (VIII: 450), Georgescu N. (E. G.: 347), Negreanu V. (VIII: 455), Sitaru C. (VIII: 450), Spineanu I. P. (VIII: 440), Al. Ştefănescu (VIII: 453, 5), Velea N. (VIII: 455).

Liceul militar „Regele Ferdinand I", Craiova.

Clasa IV-a: Antache Gh. (IV: 530, 47), Barbălată C. (IV: 530, 47), Beschea C. M. (IV: 530, 47), Boldeanu M. (IV: 530, 47), Chiriac Gh. Fl. (IV: 530, 47), Cruceanu A. (IV: 530, 47), Dumitru V. (IV: 530, 47), Dumitriu M. M. (IV: 530, 47), Eftimiu M. (IV: 530), Galău I. (IV: 547), Iatan I. I. (IV: 530), Ionescu N. (IV: 542), Ionescu P. (IV: 530, 47), Mihoiu Al. (IV: 530, 47).

(Urmarea acestui tablou va apare în numărul viitor).

EXERCIŢII PROPUSE

Soluţiile exerciţiilor propuse în acest număr se primesc până la 1 August 1941

Clasa III-a. *Exerc. 173.* Fie cercul O de rază R şi patratul înscris în el ABCD; fie A', B', C', D' mijloacele razelor OA, OB, OC, OD; M, N, P, R intersecţiile perechilor de drepte (DA', AB'), (AB', BC'), (BC', CD'), (CD', DA').

a) Să se arate că patrulaterul MNPR este un patrat cu centrul în O.

b) Că aria lui este $\frac{2}{5}$ din aria patratului dat ABCD.

Generalizare.

O. N. Ţ.

III. 174. Fie cercul O de rază R şi patratul înscris în el ABCD; fie A', B', C', D' mijloacele razelor OA, OB, OC, OD; M, N, P, R intersecţiile perechilor de drepte (DA', AB'), (AB', BC'), (BC', CD'), (CD', DA'); A_1, B_1, C_1, D_1 intersecţiile perechilor de drepte (AR, BP), (BM, CR), (CN, DM), (DP, AN).

a) Să se arate că $A_1B_1C_1D_1$ este un patrat.

b) Să se calculeze raportul ariei $A_1B_1C_1D_1$ către aria patratului dat ABCD.

O. N. Ţ.

III. 175. Se dă un unghiu drept *xoy* şi un cerc (C) de rază R tangent laturilor OX şi OY în A şi B. Dreapta OC taie cercul în G şi D; prelungim segmentul OCD cu segmentul DP egal cu raza cercului (C), iar din P ducem tangentele $\overline{PT}$ şi $\overline{PT'}$ care prelungite întâlnesc respectiv pe OX şi OY în H şi I. Dreptele TD şi T'D taie respectiv pe PT' şi PT în E şi F.

a) Să se arate că ABEF este trapez şi să se calculeze aria lui.

b) Să se calculeze aria trapezului ABT'T şi perimetrul său.

c) Să se calculeze distanţele punctelor I şi H la centrul C.

d) Să se afle perimetrul patrulaterului PIOH şi să se deducă aria lui.

(Vor fi date pentru rezultate expresiile exacte ale lor, nu aproximative).

O. N. Ţ.

III. 176. Se dă un unghiu drept *xoy* şi un cerc C tangent laturilor *Ox* şi *Oy* respectiv în A şi B. Fie D şi E mijloacele razelor CA şi CB. Segmentele OD şi OE prelungite taie cercul C în punctele F şi G; prelungim OF şi OG cu segmentele FM şi GN respectiv egale cu coardele AF şi BG.

Să se arate că patrulaterul MDEN este un trapez şi să se calculeze aria şi perimetrul lui.

O. N. Ţ.

III. 177. Se dă cercul (C) şi diametrii săi perpendiculari AB şi DE. Fie F şi G mijloacele razelor CA şi CB. Dreptele DF şi DG taie a doua oară cercul (C) în M şi N.

Să se calculeze *aria* şi *perimetrul* triunghiului înscris DMN.

O. N. Ţ.

Clasa IV-a. *Exerc. 580.* Aria laterală a unui trunchiu de con este πa^2, iar unghiul format de generatoare cu planul bazei mari este de 30°. Ştiind că raza bazei mari este cât *trei* raze ale bazei mici, să se afle volumul trunchiului de con (exprimat cu ajutorul lui *a*).

G. D. S.

IV. 581. Aria totală a unui cilindru circular drept este egală cu 5929π unităţi patrate, iar perimetrul dreptunghiului generator al cilindrului este egal cu 154 unităţi de lungime.

Să se calculeze volumul cilindrului.

O. N. Ţ.

IV. 582. Un con circular drept are raza cercului de bază R şi este astfel că, dacă proiectăm centrul cercului de bază pe generatoare în M şi apoi proiectăm punctul M pe înălţime în N, distanţa punctului N la vârful S al conului este cât trei pătrimi din înălţimea conului.

Să se afle *suprafaţa* şi *volumul* conului exprimate cu ajutorul razei date.

Ce deschidere are conul considerat?

O. N. Ţ.

IV. 583. Se dă un con circular drept a cărui înălțime este *h*. Dacă tăiem *acest con* cu un plan trecând prin axa lui, perimetrul secțiunii obținute este egal cu $2p$.

Să se calculeze *aria* și *volumul* conului dat.

Ce condiție trebue să îndeplinească datele problemei, h și p?

O. N. Ț.

IV. 584. Un trunchiu de con circular drept are generatoarea de 0,55 m, iar diametrul bazei mari de 1,43 m. Știind că distanța cea mai mare, între un punct al cercului de bază mică și un punct al cercului de bază mare, este 1,32 m, să se afle *suprafața* și *volumul* trunchiului de con dat.

O. N. Ț.

IV. 585. Se dă un cerc O și diametrul său AB, pe care îl prelungim cu o lungime BC egală cu $\overline{AB}$, și tangentele $\overline{CM}$, $\overline{CN}$ la cercul O (M și N fiind punctele de contact). Rotind figura în jurul axei CA obținem o *sferă* și un *con circular drept* cu vârful în C și cu baza cercul descris de punctul M.

a) Să se calculeze *volumul* și *suprafața* conului obținut.

b) Suprafața calotei, cuprinsă în interiorul conului, a sferei O.

O. N. Ț.

IV. 586. Se consideră sfera O de rază R, diametrul său AB, punctul S pe prelungirea acestui diametru astfel că $\overline{SB} = \overline{OB}$ și coarda CD perpendiculară pe raza OA în mijlocul ei. Conul, cu vârful în S și cu baza cercul de diametru $\overline{CD}$, taie suprafața sferei O, a doua oară, după cercul de diametru $\overline{MN}$.

Să se calculeze *suprafața* și *volumul* trunchiului de con, având ca baze cercurile de diametre $\overline{CD}$ și $\overline{MN}$.

O. N. Ț.

IV. 587. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} \dfrac{x+2y}{3} + \dfrac{2x+3y}{4} + \dfrac{3x+4y}{5} + \ldots + \dfrac{9x+10y}{11} = A \\ \dfrac{2x+3y}{4} + \dfrac{3x+4y}{5} + \dfrac{4x+5y}{6} + \ldots + \dfrac{10x+11y}{12} = B. \end{cases}$$

Generalizare.

O. N. Ț.

IV. 588. Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} \dfrac{x+2y}{5}+\dfrac{2x-y}{7}=23\dfrac{2}{7} \\ \dfrac{2x-y}{5}+\dfrac{x+2y}{7}=19\dfrac{4}{7} \end{cases}$$

şi să se verifice soluţiile aflate.

O. N. Ţ.

IV. 589. Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} \dfrac{(3u-2v)+2(4u-3v)}{3}+\dfrac{2(3u-2v)+3(4u-3v)}{4} \\ \qquad +\dfrac{3(3u-2v)+4(4u-3v)}{5}=5\dfrac{13}{15} \\ \dfrac{2(3u-2v)+3(4u-3v)}{4}+\dfrac{3(3u-2v)+4(4u-3v)}{5} \\ \qquad +\dfrac{4(3u-2v)+5(4u-3v)}{7}=6\dfrac{1}{5} \end{cases}$$

şi să se verifice soluţiile aflate.

O. N. Ţ.

Clasa V-a. *Exerc. 685.* Se dă cercul (O) de rază R, diametrul său AB, mijloacele F şi G ale razelor OA şi OB. Ducem diametrul DOE făcând cu AB unghiul DOB = 60°. Dreptele DF şi DG taie a doua oară cercul (O) în M şi N.

Să se calculeze *aria* şi *perimetrul* triunghiului DMN.

O. N. Ţ.

V. 686. Se dă cercul (O) de rază R şi diametrul său AB. Prelungim diametrul AB cu un segment $\overline{BC} = a$, iar în C pe AB ridicăm o perpendiculară $\overline{CP} = b$. Dreptele PA şi PB taie cercul (O) a doua oară în M şi N.

Să se calculeze lungimea coardei MN.

Caz particular:

$$a = R \quad ; \quad b = R\sqrt{3}.$$

O. N. Ţ.

V. 687. Se dă cercul (O) de rază R şi diametrul său AB. Prelungim pe $\overline{AB}$ cu $\overline{BC} = R$ şi ducem din C tangenta $\overline{CT}$, pe care la rândul ei o prelungim cu segmentul TP egal cu de *n* ori lungimea ei. Unim P cu A şi B. Dreptele PA şi PB taie a doua oară cercul O în M şi N.

Să se calculeze lungimea coardei MN.

Cazuri particulare:

$$n = 1 \quad ; \quad n = 2 \quad ; \quad n = 7.$$

O. N. Ţ.

V. 687. Se dă un cerc (O) de rază R şi diametrul său AB. Prelungim pe $\overline{AB}$ cu segmentul $\overline{BC} = \overline{AB}$; în C ridicăm perpendiculara CI pe AC şi pe CI luăm punctul P. Dreptele PA şi PB taie cercul (O) a doua oară în M şi N.

Să se găsească lungimea lui $\overline{PC}$ astfel ca MN să aibă lungimea $k \cdot R$.

Discuţie complectă.

Să se generalizeze luând $\overline{BC}$ egal cu o lungime dată $2a$.

O. N. Ţ.

V. 689. Fie cercul (O), diametrul său AB, un punct T pe acest cerc şi un punct P pe tangenta în (T) la cercul (O).

Dreptele PA şi PB taie a doua oară cercul (O) în punctele M şi N. Ştiind că raza cercului (O) este R şi că lungimea $\overline{TP} = l$, să se determine poziţia punctului T astfel în cât coarda $\overline{MN}$ să aibă lungimea kR.

Discuţie. O. N. Ţ.

V. 690. Fie ABCD patratul înscris în cercul (O) de raza R, tangenta DT în D la cercul O şi punctul P pe DT.

Dreptele PA şi PB taie a doua oară cercul (O) în punctele M şi N.

Putem determina o poziţie a punctului P pe tangenta DT astfel ca $\overline{MN}$ să fie un diametru al cercului (O)? Dar pentru ca $\overline{MN}$ să fie egal cu latura AB?

O. N. Ţ.

V. 691. Fie cercul (O), diametrul său $\overline{AB} = 4r$ şi cercul (C) construit pe $\overline{OA}$, ca diametru. P fiind un punct al cercului (O), însemnăm cu M punctul unde cercul (C) taie segmentul CP şi cu N punctul unde cercul (O) taie prelungirea segmentului PO.

Să se determine punctul P, astfel ca segmentul MN să aibă lungimea $2r\sqrt{3{,}5}$. Discuţie.

O. N. Ţ.

V. 692. Se dau două cercuri (O) şi (C) având razele R şi *r* şi fiind tangente exterior în punctul A. Să se construiască o secantă MNPQ astfel ca suma coardelor MN şi PQ să fie o lungime dată $2l$, iar distanţele secantei la cele două centre O şi C să fie proporţionale cu razele cercurilor respective.

Discuţie.

O. N. Ţ.

V. 693. Se dau două cercuri (O) şi (C) de raze R şi *r*, tangente exterior în A. Să se construiască o secantă MNPQ, paralelă cu dreapta centrelor, şi astfel ca suma coardelor MN şi PQ să fie o lungime dată $2l$.

Condiţiile de posibilitate ale problemei.

Să se verifice şi să se interpreteze geometric soluţia aflată în cazul problemei posibile.

O. N. Ţ.

V. 694. Fie cercurile (O) şi (C) de raze R şi *r*, tangente exterior în A şi fie I intersecţia tangentelor exterioare ale cercurilor (O) şi (C). Să se ducă o secantă comună IQPNM astfel ca perimetrele patrulaterelor, având ca laturi coardele MN, PQ şi apotemele lor, să aibă o lungime dată $2p$.

Discuţie.

O. N. Ţ.

Clasa VI-a. *Exerc. 673.* Un con circular drept are raza cercului de bază R şi este astfel că dintr'un punct M din planul bazei, aşezat la distanţa *d* de centrul cercului de bază, înălţimea conului este văzută sub un unghiu egal cu unghiul de deschidere al conului.

Să se calculeze suprafaţa laterală şi volumul conului.

Caz particular:

$$d = 3R.$$

Aplicaţie:

$$R = 2{,}5\text{ m} \quad ; \quad d = 10\text{ m}.$$

O. N. Ţ.

VI. 674. Se dă o sferă (O) de rază R şi un punct S la distanţa *d* de centrul sferei (O). Se consideră conul cu vârful în S, tangent sferei (O) şi limitat la cercul de tangenţă.

Să se calculeze:

a) Suprafaţa laterală şi volumul conului considerat.

b) Unghiul de deschidere al acestui con.

c) Suprafaţa calotei sferei (O) cuprinsă în interiorul conului considerat.

Caz particular:

$$d = 2R.$$

Aplicaţie:

$$R = 5\text{ dm} \quad ; \quad d = 8\text{ dm}.$$

O. N. Ţ.

VI. 675. Se consideră o sferă de centru O şi rază R şi un con circumscris sferei, cu unghiul de deschidere α şi limitat la cercul de tangenţă.

Să se cerceteze, dacă este posibil să determinăm unghiul α astfel ca suprafaţa laterală a conului să fie egală cu suprafaţa calotei sferei interioară conului considerat.

O. N. Ţ.

VI. 676. Se dă o sferă de centru O, de rază R şi un con circular drept înscris în sferă a cărui generatoare BC face cu axa lui unghiul de deschidere α. Se consideră conul circumscris sferei cu aceeaşi bază cu conul înscris şi cilindrul înscris sferei cu aceeaşi bază.

Să se determine unghiul α astfel ca volumul conului circumscris să fie jumătate din volumul cilindrului înscris.

O. N. Ţ.

VI. 677. Se dă un con circular drept, cu raza cercului de bază R şi unghiul de deschidere (al generatoarei cu înălţimea) de 30°. Se înscrie în acest con o sferă (C) şi se duce planul tangent la ea paralel cu baza conului; în noul con astfel obţinut se înscrie o sferă (E).

Cele două cercuri de tangenţă ale sferelor (C) şi (E) cu conul dat, determină în acest con un trunchiu de con (T).

Să se calculeze *aria laterală* şi *volumul* trunchiului de con (T).

O. N. Ţ.

VI. 678. Se dă un tetraedru regulat SABC cu laturile $\overline{SA} = \overline{SB} = \overline{SC} = \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = a$ şi se alege pe conturul bazei ABC sensul ABCA. Din vârful S se duce în fiecare faţă laterală în sensul ales o dreaptă făcând cu latura corespunzătoare a bazei unghiul ascuţit α. Se obţine în acest fel un nou tetraedru SMNP.

Să se afle *aria* şi *volumul* tetraedrului SMNP.

Aplicaţie:

1°. $a = 123$ m, $\alpha = 30°$; 2°. $a = 321$ m, $\alpha = 45°$;

3°. $a = 100$ m; $\alpha = 22° 30'$.

O. N. Ţ.

VI. 679. Se dă tetraedrul SABC cu baza ABC un triunghiu echilateral de latură a. Muchia laterală SA face cu baza un unghiu α dat şi proiecţia sa AH pe acest plan este pe mediana AM a triunghiului ABC şi astfel că $\sphericalangle SMH = 2\alpha$.

Să se calculeze *aria* şi *volumul* tetraedrului SABC.

Aplicaţie:

$a = 8$ cm ; $\alpha = 15°$.

O. N. Ţ.

VI. 680. Un trunchiu de con circular drept este circumscris unei sfere date (O) de rază R.

Ştiind că diametrul bazei mari a trunchiului de con este văzut din centrul sferei sub un unghiu dat 2α, să se calculeze *aria* şi *volumul* trunchiului de con. Să se determine unghiul α astfel ca suprafaţa laterală a trunchiului de con să fie $\frac{2}{3}$ din aceea a conului din care face parte. Să se găsească volumul trunchiului de con în acest caz.

O. N. Ţ.

VI. 681. La o piramidă SABC vârful S se proiectează în C iar plecând din vârful A la vârful S pe drumul ACBS punctul C este la jumătatea drumului. Știind că înălțimea vârfului S al piramidei are măsura h, că ea este văzută din A sub un unghiu ascuțit de măsură α și că unghiul C al bazei are măsura γ, să se calculeze *aria* și *volumul* piramidei SABC.

Aplicație:

$$h = 12 \text{ cm} \quad ; \quad \alpha = 22^0\,30' \quad ; \quad \gamma = 15^0.$$

O. N. Ț.

VI. 682. In planul (P) se dă patratul ABCD. Se ia punctul H pe diagonala BD, astfel că laturile patratului ABCD sunt din acest punct sub unghiul α. In punctul H pe planul (P) se ridică perpendiculara $\overline{HS}$, care este văzută din D sub unghiul β. Să se calculeze aria laterală a piramidei SABCD.

O. N. Ț.

Clasa VII-a. *Exerc. 589.* Să se calculeze derivata funcției implicite:

$$\sqrt{e^{2y-x^2} - 1} \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{e^{2y-x^2} - 1} - y = 0$$

și valoarea derivatei pentru $x = \sqrt{\frac{\pi}{2} - L2}$, $y = \frac{\pi}{4}$.

G. D. S.

VII. 590. Se dă funcția:

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{x_1^m x_2^m + x_2^m x_3^m + \ldots + x_n^m x_1^m}{x_1^{2m} + x_2^{2m} + \ldots + x_n^{2m}}.$$

Știind că avem:

$$x_i^{2m} = \alpha_i \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

să se demonstreze relația:

$$x_1^{2m} u'_{\alpha_1} + x_2^{2m} u'_{\alpha_2} + \ldots + x_n^{2m} u'_{\alpha_n} = 0.$$

V. Gh.

VII. 591. Se dă un cerc (O), diametrul său $\overline{EF}$, un punct M variabil pe cerc şi patratul ABCD circumscris cercului. Alegând sensul ABCDA pe conturul patratului, se prelungesc laturile AB şi CD cu segmentele BN şi DS egale cu $\overline{EM}$, iar laturile BC şi DA cu segmentele CP şi AT egale cu MF. Să se studieze variaţia perimetrului patrulaterului NPST.

O. N. Ţ.

VII. 592. Să se calculeze

$$\frac{\frac{1}{C_3^3}+\frac{1}{C_4^3}+\frac{1}{C_5^3}+\ldots+\frac{1}{C_n^3}}{\frac{1}{C_4^4}+\frac{1}{C_5^4}+\frac{1}{C_6^4}+\ldots+\frac{1}{C_{n+1}^4}}.$$

C. I. B.

VII. 593. Să se calculeze:

$$\lim \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}-3}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}+\sqrt[7]{x}-3}$$

când $x \to 1$, apoi când $x \to \infty$.

C. I. B.

VII. 598. Să se reprezinte funcţiunea

$$y(x-1)(y-5)+4x-6=0.$$

C. I. B.

VII. 599. Să se reprezinte funcţiunea

$$y = e^{\frac{x-1}{x^2-x-2}}.$$

C. I. B.

VII. 600. Să se reprezinte funcțiunea:

$$y = \mathrm{L}\,\frac{x-1}{x^2-x-2}\,.$$

C. I. B.

VII. 601. Să se calculeze cu 5 zecimale exacte, numărul din baza $\sqrt{e}$ al cărui logaritm este $\frac{1}{e}$.

C. I. B.

VII. 602. Să se discute sistemul:

$$x\cos\frac{\beta}{2}+y\cos\frac{\gamma}{2}=x\cos\frac{\gamma}{2}+z\cos\frac{\alpha}{2}=y\cos\frac{\alpha}{2}+z\cos\frac{\beta}{2}=$$

$$=x+y+z, \quad \text{dacă } \alpha+\beta+\gamma=k\pi \quad (k \text{ număr întreg}).$$

In cazul compatibilității să se rezolve.

C. I. B.

Clasa VIII-a. *Exerc. 476.* Fie patratul ABCD înscris în cercul (O) de rază R, tangenta DT în D la cercul (O) și un punct P pe tangenta DT.

Să se determine poziția punctului P astfel ca $\overline{MN}$ să aibă o lungime dată $2a$.

Discuție.

O. N. Ț.

VIII. 477. Se dă o sferă (O) de rază R și conul circumscris cu unghiul de deschidere α. Să se determine α astfel ca suprafața laterală a conului să fie față de suprafața uneia din calotele sferei (interioară sau exterioară conului) într'un raport dat k. Discuție.

Cazuri particulare:

$$k=2 \quad ; \quad k=6.$$

O. N. Ț.

VIII. 478. Să se arate că într'un patrulater cu diagonalele dreptunghiulare, suma patratelor a două laturi opuse este egală cu suma patratelor celorlalte două laturi.

GH. B.

VIII. 479. Fie A_1 mijlocul laturii BC a triunghiului ABC şi A' un punct pe mediatoarea A_1A'. Dacă x, y, z sunt distanţele lui A' la laturile BC, CA, AB, atunci

$$by - cz = x\,[c\cos B - b\cos C].$$

GH. B.

VIII. 480. Se consideră ecuaţia

$$x^2 + px + q = 0,$$

ale cărei rădăcini se notează x_1, x_2.

1°. Fără a rezolva ecuaţia, să se formeze ecuaţia care admite rădăcinile:

$$a + \frac{1}{x_1^2}\ ,\quad a + \frac{1}{x_2^2}\cdot$$

2°. Să se afle condiţia ca ecuaţia formată să aibă rădăcinile comune cu

$$q^2x^2 - p^2x + ap^2 = 0.$$

3°. In acest caz, presupunând că a şi q variabile reprezintă respectiv abscisa şi ordonata unui punct variabil M într'un plan raportat la două axe rectangulare, să se deseneze curba (C) descrisă de punctul M.

4°. Să se scrie ecuaţia tangentei la curbă în punctul de abscisă p.

5°. Dacă y este unghiul format de axa absciselor cu tangente în punctul curent la curba (C), să se calculeze derivata y' în raport cu a.

C. I. B.

VIII. 481. Se dă un cerc de rază r şi două puncte P, Q diametral opuse pe cerc. Fie ABCD un trapez isoscel, cu laturile tangente cercului, AB şi CD fiind tangente în P şi Q; fie R şi S punctele de tangenţă ale laturilor BC şi DA.

1°. Să se arate că $\sphericalangle SPR = \sphericalangle ABC$.

2°. PB şi CQ fiind respectiv abscisa şi ordonata unui punct M din plan, să se reprezinte curba descrisă de M când vârfurile A şi B, C şi D ale trapezului isoscel ABCD se deplasează pe tangentele la cerc în P, Q iar $r = 2$.

3°. Să se scrie ecuaţia tangentei T la această curbă în punctul de abscisă $\sqrt{3}$.

4°. Dacă a este unghiul format pe dreapta T cu axa absciselor, să se calculeze valoarea lui $\sin 3a$.

5°. Dacă vârfurile trapezului ABCD se deplasează ca la punctul 2°, să se studieze variaţia perimetrului trapezului.

C. I. B.

VIII. 482. Se dau curbele:

$$(C_1)\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(a-1)^2} = 1,\quad (C_2)\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{(a+1)^2} - 1 = 0$$

şi punctele M_1, M_2 respectiv de abscise α_1, α_2 pe aceste curbe. Dacă $\alpha_1 = k\alpha_2$, să se exprime aria triunghiului determinată de tangentele în M_1, M_2 la (C_1), (C_2) şi axa $x'x$.

C. I. B.

VIII. 483. In raport cu un sistem de axe rectangulare xoy se dau punctele $A(o, a)$, $A'(o, -a)$, $B(b, 2a)$, $B'(o, -2a)$.

1°. Să se scrie ecuaţia parabolei P având dreapta Ox axă de simetrie, vârful în origina axelor de coordonate şi trecând prin B.

2°. Să se scrie ecuaţia tangentei în B la parabola P.

3°. Să se arate că b fiind variabil, tangentele în B la parabolele P trec printr'un punct fix, ale cărui coordonate să se determine.

4°. Să se determine b astfel încât tangenta în B la parabola P corespunzătoare să facă un unghiu de 75° cu Ox.

5°. b fiind variabil, să se arate că segmentul de dreaptă mărginit de mijloacele diagonalelor patrulaterului AA'B'B este constant (soluţie geometrică).

C. I. B.

Exerciţii generale. *374.* Să se arate că dacă

$$a+b+c+d=0,$$

atunci $a^3+b^3+c^3+d^3$ se divide prin 3.

Generalizare.

GH. B.

E. G. 375. Când suma a trei cuburi perfecte consecutive este divizibilă cu 33?

C. I. B.

E. G. 376. Să se găsească patru numere pare consecutive sau patru numere impare consecutive astfel ca suma patratelor lor să fie un patrat perfect.

C. I. B.

E. G. 377. Să se arate că suma patratelor a trei numere consecutive nedivizibile cu 5, este un număr care împărţit cu 5 dă restul — 1.

C. I. B.

E. G. 378. Să se găsească două numere astfel ca suma cuburilor să fie divizibilă cu 7.

C. I. B.

E. G. 379. Să se găsească forma a două numere întregi de aceiaşi paritate, consecutive, astfel ca suma puterilor lor a 4-a să fie divizibilă cu 14.

C. I. B.

E. G. 380. Diferenţa puterilor a 5-a a două numere întregi consecutive nu poate fi divizibilă cu 60.

C. I. B.

E. G. 381. Suma puterilor a 5-a a două numere de aceeaşi paritate, consecutive, este divizibilă cu 4.

C. I. B.

INSTRUCȚIUNI

a) Soluțiile exercițiilor se vor scrie cu cerneală, pe sferturi de coală și numai pe o parte a foii.

Dacă va fi nevoie de mai multe foi pentru soluționarea unui exercițiu, ele se vor coase sau lipi în partea stângă. Figurile, ce vor fi necesare pentru urmărirea exercițiului se vor construi îngrijit, pe foi aparte, având formatul arătat mai sus și se vor coase sau lipi odată cu soluția.

Nu se vor trimite soluțiile mai multor exerciții pe aceeași foaie.

b) Redactarea soluțiilor se va face astfel:

Sus, se va scrie numărul exercițiului, dedesubt enunțul astfel cum e publicat în revistă, cu inițialele propunătorului, apoi soluția clar compusă, iar la sfârșit, iscălitura rezolvitorului în ordinea următoare:

Numele de botez complet, inițiala părintelui, numele de familie, însoțit de clasa și școala pe care o urmează.

c) Nu se vor lua în considerare soluțiile iscălite de 2 sau mai mulți corespondenți, nici soluțiile exercițiilor propuse la clase inferioare aceleia în care corespondentul se află. Pentru redijarea soluțiilor se pot vedea indicațiile din Nr. 1, Vol. IV.

d) Soluțiile se primesc timp de 3 luni dela propunerea exercițiului, numai dela abonații „Suplimentului cu Exerciții" al Gazetei Matematice, pe adresa Locot. C. D. Ionescu-Țiu, Casa Gazeta Matematică, Calea Griviței 158, București 2.

Drepturile de reproducere rezervate Societății «Gazeta Matematică».

Elevii claselor VI, VII și VIII, cu bogată activitate la această revistă își pot lărgi cadrul activității soluționând probleme din „Gazeta Matematică".

In Biblioteca „Gazetei Matematice" au apărut și se găsesc la adresa indicată mai sus, următoarele:

III. **N. Abramescu,** Lecțiuni elementare de Algebră superioară, pentru clasa VIII-a științifică, Ediția VI-a . . . . . Lei 120

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și G. Țițeica,** Vocabular Matematic . . . . . Lei 20

X. **G. Țițeica,** Culegere de Probleme de Geometrie . . . . . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. Istoric, învățăminte. Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 200 / pentru abonații G. M. și S. G. M. . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I. (Goniometrie) revăzută și adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** Culegere de Probleme de Aritmetică. Partea I. Aritmetica rațională . . . . . Lei 190

XIV. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I-a. (Trigonometrie plană). Ediția II-a revăzută și adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

XV. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea I. Ediția IV-a revăzută și mărită . . . . . Lei 120

XVI. **G. Țițeica,** Culegere de Probleme de Geometrie Analitică. Partea I. Ediția II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 140

XVII. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea II-a. Ediția IV-a, revăzută și mărită . . . . . Lei 240

Biblioteca Istorică a GAZETEI MATEMATICE

1. Elementele lui **Euclid.** (Cărțile I — VI de Geometrie plană) tradusă din limba greacă de *V. Marian* . . . . . Lei 160

Suplimentul cu Exerciții. Abonamentul anual (9 numere) . . Lei 50

„Gazeta Matematică" apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plătește înainte și începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele și toată corespondența se trimite pe adresa:

Societății „GAZETA MATEMATICĂ"

Casa Gazeta Matematică — Calea Griviței No. 158. — București 2.

(Telefon: 3-9803).

M. O., IMPRIMERIA NAȚIONALĂ — C. 71.263

1940/41

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL VII. No. 9 1 IUNIE 1941

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAȚIUNII" SIBIIU

SOCIETATEA GAZETA MATEMATICĂ
CALEA GRIVIŢEI, 158. BUCUREŞTI 2. — TELEFON 3-9803

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL VII. No. 9 — 1 IUNIE 1941

ABONAMENTUL LEI 50 PE AN (9 numere)

Soluţii şi orice corespondenţă pe adresa:

Căpitan Ing. C. D. IONESCU-ŢIU

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviţei 158. — Bucureşti 2

EXERCIŢII REZOLVATE

Clasa VI-a. *Exerc. 632. Notaţiile fiind cele cunoscute în triunghiu, să se arate că avem relaţia:*

$$\Sigma a^2 \sin C \cdot \cos B + 2S \cdot \Sigma \cos A = 2R \cdot \Sigma a \sin^2 C.$$

V. GH.

Intrebuinţăm formulele

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \; ; \; a = c\cos B + b\cos C \; ; \; bc \sin A = 2S.$$

Avem succesiv:

$$c\cos B + b\cos C = 2R \sin A$$

$$\frac{2S}{b \sin A}\cos B + b\cos C = 2R \sin A$$

$$2S\cos B + b^2 \sin A \cos C - 2bR \sin^2 A = 0.$$

Ultima relaţie împreună cu celelalte două deduse din ea prin permutări circulare, adunate parte cu parte, ne conduc la relaţia propusă.

Exerciţii generale. *Exerc. 256. Să se arate, fără utilizarea metodei prin resturile diviziunei, că avem:*

$$2^{83} \cdot 5^{82} - 1 = M7^2.$$

I. L.

Avem:

$$2^{83} \cdot 5^{82} = 2 \cdot 10^{82} = \underbrace{2000\ldots 0}_{82}$$

Deci:

$$\frac{2^{8^1} \cdot 5^{82} - 1}{7} = \underbrace{1999\ldots 9}_{82} : 7$$

$$= 2857 . \underbrace{142857 \ldots 142857}_{13 \text{ perioade}}$$

Apoi împărţind din nou câtul cu 7, obţinem drept cât:

408 . 163265 . 306122 . 448979 . 591836 . 734693 . 877551.

020408 . 163 51

Adică un număr de 81 cifre.

O soluţie identică (cu o singură eroare, scriind 7 în loc de 5 în cât) a fost dată de D-l G. I. MIHAIL (cl. VII-a B, T.-Severin).

E. G. 286. Care sunt numerele pentagonale de prima speţă, vecine lui 1940?

I. L.

Numerele poligonale (q laturi) de ordinul n, de prima speţă, au expresiunea:

$$P_n^q = n + (q-2) . \frac{n(n-1)}{2} .$$

Pentru $q = 5$, trebue să avem:

$$P_n^5 \overline{\sim} 1940,$$

şi făcând calculele găsim numerele *1926* şi *2035*.

E. G. 287. Care sunt numerele pentagonale de a doua speţă, vecine lui 1940?

I. L.

Numerele poligonale (q laturi) de ordinul n, de a doua speţă, au expresiunea:

$$O_n^q = 1 + q . \frac{n(n-1)}{2} .$$

Pentru $q = 5$, trebue să avem:

$$O_n^5 \equiv 1940,$$

şi făcând calculele, găsim numerele: *1891* şi *2031*.

E. G. 288. Numărul 1940 poate să fie un număr piramidal cu bază triunghiulară?

I. L.

Un număr piramidal cu bază triunghiulară are expresia:

$$T_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}.$$

Egalând:

$$n(n+1)(n+2) = 6 . 1940$$

apoi extrăgând rădăcina cubică, luând numai partea întreagă, a lui 6×1940, găsim că

$$22 < n + 1 < 23$$

şi deci:

$$21 \times 22 \times 23 = 1771 \times 6$$

şi

$$22 \times 23 \times 24 = 2024 \times 6.$$

Deci *1940* nu poate fi un număr piramidal cu bază triunghiulară.

E. G. 293. Să se arate că expresiunea:

$$E = 2^{\alpha+1} + 3^{\alpha}$$

reprezintă foarte multe numere prime când α este întreg şi pozitiv.

I. L.

Prima soluţie.

Un număr prim este mai întotdeauna de forma $M6 \pm 1$. Cum avem:

$$\begin{array}{llll} 2 = M6 + 2 & & 3 = M6 + 3 \\ 2^2 = M6 + 4 & \text{şi} & 3^2 = M6 + 3 \\ 2^3 = M6 + 2 & & 3^3 = M6 + 3 \\ \ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Urmează că:

$$2^{\alpha+1} = M6 \pm 2 \quad \text{și} \quad 3^{\alpha} = M6 + 3.$$

Deci:

$$E = 2^{\alpha+1} + 3^{\alpha} = M6 \pm 1.$$

A doua soluție.

In „Théorie des Nombres" par E. LUCAS, pag. 342 (Exer. IV) se spune că:

„Dacă $(a^{\alpha} + b^{\beta})$ este prim, atunci cel mai mare codivizor al lui α și β este 1 sau o putere a lui 2".

In cazul nostru este 1, deci expresiunea poate reprezenta numeroase numere prime.

E. G. 295. Dacă N *este un număr perfect par, atunci diferența între el și dublul indicatorului lui este o putere a lui 2.*

I. L.

$N = 2^n . (2^{n+1} - 1)$ unde factorul al doilea este prim.

$$\varphi(N) = 2^n (2^n - 1).$$

Atunci:

$$N - 2\varphi(N) = 2^n .$$

E. G. 296. Să se arate că dacă N *este un număr perfect par de forma* $2^m . (2^{m+1} - 1)$ *și dacă* $\varphi_n(N)$ *este indicatorul de ordinul* n *a lui* N, *atunci avem:*

$$\varphi_n(N) \times \varphi_n\left(\frac{N}{2^m}\right) \geqslant \varphi_{n-1}\left(\frac{N}{2^n}\right) \times \varphi_{n+1}(N).$$

I. L.

Vom nota:

$$A = \varphi_n(N) \quad \text{și} \quad B = \varphi_{n-1}\left(\frac{N}{2^n}\right).$$

Trebue să arătăm că:

$$A . \varphi(B) \geqslant B . \varphi(A)$$

sau:

$$\frac{A}{\varphi(A)} \geqslant \frac{B}{\varphi(B)} .$$

Se ştie însă că A şi B sunt generate, prin indicare, din numere perfect pare, adică din numere având aceeaşi factori primi. Deci avem două cazuri :

1. Dacă B are aceeaşi factori primi ca A însă cu exponenţi mai mici, atunci avem :

$$\frac{A}{\varphi(A)} = \frac{B}{\varphi(B)}.$$

2. Dacă B are unul sau mai mulţi factori mai puţin ca A, admiţând chiar că ar avea factori $p^{\pi}.q^{k}.r^{\rho}\ldots$ atunci condiţia de mai sus devine :

$$p.q.r\ldots > (p-1)(q-1)(r-1)\ldots$$

care este evidentă.

Observaţiuni :

1. Iniţial problema a fost publicată ca o egalitate, fapt ce are multe şanse de adevăr. Vom încerca deci a da o mai amplă soluţie în *Gazeta Matematică.*

2. Dacă admitem că toate numerele de forma $(2^{m-i}-1)$ sunt prime (ceea ce nu este adevărat), atunci avem :

$$N = 2^{m}.(2^{m+1}-1)$$
$$\varphi_1(N) = 2^{m}.(2^{m}-1)$$
$$\varphi_2(N) = 2^{m}.(2^{m-1}-1)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi_n(N) = 2^{m}.(2^{m-n+1}-1)$$
$$\varphi_{n+1}(N) = 2^{m}.(2^{m-n}-1).$$

Apoi :

$$\frac{N}{2^{m}} = 2^{m+1}-1$$
$$\varphi_1\left(\frac{N}{2^{m}}\right) = 2.(2^{m}-1)$$
$$\varphi_2\left(\frac{N}{2^{m}}\right) = 2.(2^{m-1}-1)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi_{n-1}\left(\frac{N}{2^{m}}\right) = 2.(2^{m-n+2}-1)$$
$$\varphi_n\left(\frac{N}{2^{m}}\right) = 2.(2^{m-n+1}-1).$$

Atunci observăm că:

$$\varphi_n\ (N) \times \varphi_n \left(\frac{N}{2^m}\right) = 2^{m+1} \cdot (2^{m-n+1} - 1)(2^{m-n+1} - 1)$$

şi

$$\varphi_{n+1}(N) \times \varphi_{n-1}\left(\frac{N}{2^m}\right) = 2^{m+1} \cdot (2^{m-n} - 1)(2^{m-n+2} - 1)$$

condiţia devine:

$$(2^{m-n+1} - 1)^2 > (2^{m-n} - 1)(2^{m-n+2} - 1)$$

sau: $2^{m-n} > 0$ ceea ce este evident.

E. G. 297. Care este expresiunea produsului numerelor prime cu un număr perfect par şi inferioare lui?

I. L.

In G. M. XXXI — 83, avem pentru $N = a^{\alpha} \cdot b^{\beta}$, formula produsului:

$$P(N) = \frac{N!\left(\frac{N}{ab}\right)!}{\left(\frac{N}{a}\right)!\left(\frac{N}{b}\right)!\ a^{\frac{\varphi(N)}{a-1}} \cdot b^{\frac{\varphi(N)}{b-1}}}.$$

Deci pentru $N = 2^n \cdot (2^{n+1} - 1)$ avem:

$$P(N) = \frac{2^{n-1}!\,[2^n \cdot (2^{n+1} - 1)]!}{2^n!\,[2^{n-1} \cdot (2^{n+1} - 1)]!\ 2^{2^n \cdot (2^n - 1)} \cdot (2^{n+1} - 1)^{2^{n-1}}}.$$

E. G. 344. Să se calculeze suma:

$$S = 1 + 432 + 103.680 + \ldots$$

limitată la al n-lea termen.

V. GH.

Plecăm dela identitatea

$$x + x^3 + x^5 + \ldots + x^{2n-1} \equiv \frac{x^{2n+1} - x}{x^2 - 1},$$

pe care derivând-o, vom găsi:

$$1+3x^2+5x^4+\ldots=\frac{[(2n+1)x^2-2x^2-(2n+1)]x^{2n}+x^2+1}{(x^2-1)^2}.$$

Făcând aici $x=12$ obținem tocmai

$$S=1+432+103.680+\ldots=\frac{(286n-145)144^n+145}{20.449}.$$

Până la 10 Mai s'au primit soluțiuni bune pentru exercițiile publicate în numerele 6, 7, 8, anul VII, dela[1]):

Școala Centrală, București.

Clasa VII-a: Agapie Elena (VII: 582), Timotin A. Silvia (VII: 570).

Liceul „Regina Maria", București.

Clasa III-a: Panteli Fl. I. Fiona (III: 153, 4, 5, 6).
Clasa IV-a: Agapie Paula (IV: 570*, 3).

Liceul „Carmen-Sylva", București.

Clasa VI-a: Epure C. Marilena (VI: 639).

Institutul Ortodox Internat, București.

Clasa IV-a: Mateescu Mihaela (IV: 570*, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 80, 1, 2, 3, 4, 5, 8, E. G.: 374, 7).

Institutul Ortodox, Buzău.

Clasa III-a: Băltescu Argentina (III: 164*, 5*, 8).

Liceul „Oltea Doamna", Iași.

Clasa III-a: Albu Aurelia (III: 168, 9), Andreian Cabiria (III: 145, 58, 9*, 60*, 1, 2, 3*, 4*, 5*), Chiriac I. Georgeta (III: 168, 9, 70, 2), Diaconescu C. Georgeta (III: 163, 5, 6).
Clasa VII-a: Popovici I. Florica (VII: 565, 70, 1), Teodorescu G. Olga (VII: 570).

---

1) Semnul * însoțește numărul unui exercițiu rezolvat foarte bine.

Liceul „Aurel Vlaicu", Bucureşti.

Clasa III-a: Barbaiani A. Mihai (III: 161, 2, IV: 550).

Clasa VII-a: Calmuschi Gh. Ion (VII: 561, 3), Nicolaescu Gh. Aurelian (VII: 561, 3, 5, 570).

Clasa VIII-a: Barbaiani A. Ion (VIII: 438, 48, 9, E. G.: 348, 55, 439, 53*), Buga I. M. (VIII: 438, 9), Davidescu Al. Al. (VIII: 438, 9*, 47, 8), Duinea M. A. (VIII: 438).

Colegiul Naţional „Sf. Sava", Bucureşti.

Clasa V-a: Bâlcu Niculae (V: 657), Harbuniev P. V. (V: 657*), Rădulescu T. Adrian (V: 678), Stănescu Gh. P. (V: 678*).

Clasa VI-a: Ştefănescu-Priboi Const. (VI: 650, 1*, 8, E. G.: 363).

Clasa VII-a: Andonie St. Iancu (VII: 572, 3), Budurcea I. C. (VII: 573), Ghemuşliu Gh. (VII: 572, E. G.: 364), Ionescu I. Grigore (VII: 572, VIII: 446, 61), Nadolu Grigore (VII: 561).

Liceul „Gh. Lazăr", Bucureşti.

Clasa V-a: Iliescu-Brânceni N. B. (V: 682, E. G.: 364, 6), Timotin A. A. (V: 643).

Clasa VII-a: Iliescu-Brânceni C. (E. G.: 364, 74), Lăzărescu Cezar (E. G.: 364).

Liceul „Gh. Şincai", Bucureşti.

Clasa VI-a: Chiru M. Grigore (VI: 650), Constantinescu I. Mihail (VI: 651*, 2*), Pârvulescu V. Const. (VI: 631, 50).

Clasa VIII-a: Anghel T. (VIII: 438, 46, 7, 8, 9, 53, 4).

Liceul „Marele Voevod Mihai", Bucureşti.

Clasa VI-a: Bratu I. Eugen (VI: 650).

Clasa VIII-a: Iordache Sterian (VIII: 458, 78), Popescu Florin (VIII: 438, 9, 53, 4, 7, 8).

Liceul „Mihai Viteazu", Bucureşti.

Clasa IV-a: Munteanu P. Vlad (IV: 550, 1, 2, 4, 5, 60, 1, 71).

Clasa V-a: Ionescu Gr. I. (V: 665).

Liceul „Matei Basarab", Bucureşti.

Clasa III-a: Costin A. Al. (III: 151).

Liceul „Cantemir Vodă", Bucureşti.

Clasa IV-a: Fintescu I. Nicolae (IV: 545, 7, 8, 50).

Liceul „Titu Maiorescu", Bucureşti.

Clasa VII-a: Lahovary N. Al. (VII: 570), Marinescu Al. I. Viorel (VII: 561, 2, 3), Seni Cl. (E. G.: 364, 74).

Clasa VIII-a: Bugaevschi S. E. (VIII: 439).

Liceul „Mihail Eminescu", București.

Clasa VI-a: Aron I. Gheorghe (VI: 674).

Institutul „Schewitz-Thierrin", București.

Clasa VIII-a: Kahaian S. Z. (VIII: 478).

Liceul „Sf. Andrei", București.

Clasa VIII-a: Moscovici N. Eug. (VIII: 478, E. G.: 364).

Liceul „Moise Nicoară", Arad.

Clasa VII-a: Cristea Viorel (VII: 561, 72).

Liceul „Dr. Ion Meșotă", Brașov.

Clasa VI-a: Florică Stelian (VI: 633), Georgescu M. (VI: 663), Negrea Gr. D. (VI: 639).

Clasa VII-a: Halmagiu A. Mircea (VII: 562, 5).

Clasa VIII-a: Cristea Lucian (VIII: 447, 9, 38).

Liceul „Știrbei Vodă", Călărași.

Clasa IV-a: Nicolaescu T. Viorel (IV: 550, 2, 4, 61, 9, 88).

Clasa VI-a: Culea I. D. (VI: 639, 46), Rădulescu V. N. (E. G.: 343, 5, 7), Stoenescu R. Ioan (VI: 679).

Liceul „Ioniță Assan", Caracal.

Clasa VII-a: Musceleanu S. I. V. (VII: 565, 9*, 70, 1, 2, 3, 6, E. G.: 345, 7, 8, 9, 54, 5, 8), Musceleanu Doru (VIII: 438).

Liceul Militar „Ștefan cel Mare" Câmpulung, Muscel.

Clasa IV-a: Damian Corneliu (IV: 579, 88), Dorneanu Liviu (IV: 561, 73), Lintescu V. M. (IV: 573), Marin Gh. Anton (IV: 561, 88), Prisecaru D. Mircea (IV: 573, 668), Roman C. Vasile (IV: 560), Sintescu V. Mihai (IV: 588, 9), Zigorea Nicolae (IV: 561).

Clasa V-a: Colănel D. Ioan (V: 665, 8), Dumitrescu Gh. (V: 665, 8), Staicu I. C. (V: 643, 4, 78, E. G.: 312, 26, 64, 74*, VIII: 437), Nicolaescu I. (V: 657), Ranga A. C. (V: 643, 57), Țăranu Șt. (V: 657).

Clasa VII-a: Bărbuț I. T. (VII: 573), Zavati C. C. (VII: 573),

Clasa VIII-a: Botez Marcel (VIII: 456).

Liceul „Mircea cel Bătrân", Constanța.

Clasa V-a: Pambuccian M. A. (V: 657, 65, 7).

Clasa VII-a: Sotiriu H. Teodor (VII: 555, 7, 8, 9).

Liceul „Frații Buzești", Craiova.

Clasa VIII-a: Voinea P. Radu (VIII: 449, E. G.: 345, 58, 69*, 70*).

Liceul militar „Regele Ferdinand I", Craiova.

Clasa IV-a: Petroaia I. (IV: 530, 47), Rosuţ Gh. (IV: 530, 47), Rosnovan I. (IV: 530, 47), Steensbale Otto (IV: 530), Stoenescu D. (IV: 530, 47).

Clasa V-a: Bădescu D. S. (V: 665), Cazacliu A. (V: 656), Crişan R. D. (V: 656), Fantu Sp. (V: 656), Grigorescu F. I. (V: 650), Grigorescu M. (V: 656), Lazăr St. (V: 656) Matei I. (V: 656), Mareş Al. (V: 650, 6, 67), Pârvan St. (V: 656), Racoceanu V. M. (E. G.: 351, 2, 3), Vasiliu Ad. (V: 656).

Clasa VI-a: Antohi V. (E. G.: 334, 8), Dinculescu N. (E. G.: 334), Florea V. V. (E. G.: 334, 47, 8), Gherman A. E. G.: 334, 8, 9, 47, 8), Gruti S. (E. G.: 334, 47), Hârjeu G. (E. G.: 334, 9), Pavelescu N. (E. G.: 334, 8), Popescu O. (E. G.: 334, 8, 9, 47, 8), Popescu Ştefăneşti (E. G.: 338), Ştefanovschi G. (E. G.: 338, 9), Tatu R. (E. G.: 348), Trifan G. (E. G.: 339, 48), Vasilescu L. (E. G.: 332), Cristea C. (VII: 549), Filip Gh. (VII: 559).

Clasa VII-a: Albeanu Gh. (VIII: 453), Bârsan Gh. (VIII: 451, 3, 65), Bidianu I. (VIII: 443, 65), Grozăvescu A. (VIII: 465), Ilie Nic. (VIII: 453), Jalbă Luc. (VIII: 453), Moldoveanu D. (VIII: 453, 48; E. G.: 334, 8, 9, 40, 8, 9), Nestorescu Tache (VIII: 438, 53), Nicolau V. (VIII: 453, 63), Perjescu T. (VIII: 453, 45), Preotu P. (VIII: 453), Rusu V. (VIII: 453), Vesa Virg. (VIII: 453 *).

Liceul Militar „D. A. Sturdza", Craiova.

Clasa IV-a: Angheloiu I. I. (IV: 574), Dediu M. Şt. (IV: 574), Demetrescu M. Marius (IV: 574), Ghiuţei A. Gh. (IV: 574), Gogoaşe Sever (IV: 574), Hurezeanu M. (IV: 574), Nicolicioiu D. (IV.: 574), Popa A. N. (IV: 574), Rusu T. N. (IV: 574), Ulmet V. V. (IV: 574).

Clasa V-a: Cernat T. M. (V: 665).

Clasa VI-a: Bădescu Florin (VI: 673), Guiculeanu Nic. (VI: 673), Marinescu D. I. (VI: 673), Rădulescu Ioan (VI: 673).

Clasa VII-a: Bărbuceanu D. Virg. (VII: 552), Diacon Aleş. (VII: 565, 73; E. G.: 343, 5, 50. 55, 8*, 9*, 60*, 54, 64*), Mateescu A. (E. G: 358, 64).

Clasa VIII-a: Cătulescu D. E. (VIII: 438), Fera St. D. (VIII: 438, 43, 4, 55), Ionescu M. C. (E. G.: 338, 9, 40, 7, 8, 9), Rădulescu M. V. (VIII: 443; E. G.: 343, 5, 34, 8, 9, 47, 8, 9, 51, 2, 3), Spineanu P. (VIII: 432; 8, 44, 5).

Liceul „Unirea", Focşani.

Clasa VIII-a: Gheorghe I. (VIII: 438, 9, 49, 53), Doagă St. (E. G.: 341, 4), Ioan Gh. Gh. (VIII: 451, 6*, 7*).

Liceul Militar Iaşi.

Clasa III-a: Bârzescu M. (III: 168), Chirilovici C. (III: 172), Ciuman Viorel (III: 68, 72), Balan C. (E. G.: 358, 64), Ciobanu D. D. (V: 678), Ciureanu Gh. Const. (III: 163, 6, 8), Filimon Ioan (III: 168; E. G.: 364),

Grama Florin (III: 161), Ifrim Alfons (III: 168), Nache D. D. (III: 156; E. G.: 347), Radu M. C. (E. G.: 347), Roşie Marcel (III: 163), Stan Const. (III: 168, 9, 72).

Clasa IV-a: Bogza I. N. (IV: 552), Păstrăvanu Tr. (IV: 530), Solescu M. (IV: 551, 4).

Clasa V-a: Andrei Gh. Aurel (V: 656, 7, 8, 73, 60, 3, 83; VIII: 439: E. G.: 334, 8, 9, 40, 1, 7, 8, 9, 58, 64), Andreescu M. (V: 655, 73, 8, 81, 3, 4; E. G.: 638), Ardeleanu Gh. (V: 673, 8, 83), Andarache Ion (V: 683), Baciu D. V: 656, 7, 83; E. G.: 347, 64), Capverde I. Valeriu (V: 644, 55, 8, 78, 73, 9; E. G.: 338, 48); Chirică Nic. (V: 656, 66, 73, 6, 83), Ceeală I. (V: 665, 6, 83), Coroi Dan (V: 665, 81, 2, 3; E. G.: 364), Davidescu George V: 665, 78, 82, 3), Dragomir P. C. (V: 657, 78), Ganea N. (V: 623, 40, 56, 65, 73, 83), Grigoriu Gh. Rom. (V: 678), Gheorghiu N. St. (V. 683), Ionescu Mihai (V: 657, 73, 83), Ignatovici Dumitru (V: 683), Ionescu Mircea (V: 683), Nacu D. Mihai (V: 683; E. G: 346), Oană V. T. (V: 656, 78, 82, 3; E. G.: 346, 7), Opran S. M. (V: 657, 65, 83), Palade I. T. (V: 656, 65, 6*, 73; E. G.: 658), Petrache Ioan (V: 673, 83; E. G.; 347), Petrican I. M. (V: 657, 83), Platon C. R. (V: 678, 81), Popa N. N. (V: 656, 7, 81, 2, 3; E. G.: 341, 7, 58, 64), Simion Andr. (V: 656, 7, 83), Stroescu Paul (V: 656, 7, 83), Tănase V. (V: 678, 83; E. G.; 347), Tatoiu C. (V: 683; E. G.; 347), Teodorescu Călin (V: 683), Tudorache V. (V: 673, 81), Tomescu M. (V: 655, 6, 73, 78), Turculeţ Tib. (V: 656, 7, 8, 73, 8, 81, 3; E. G.: 346, 7, 64), Ţicăloiu Oct. (V: 656, 7, 78, 80, 1, 3), Văideanu G. (V: 673, 82; E. G.: 364), Vlad D. G. (V: 665, 73, 6, 8, 83), Văleanu Dan (E. G.: 347), Zaharia M. (V: 656, 7, 73, 83).

Clasa VII-a: Popa N. Aurel (VII: 338, 9, 42; VIII: 438), Bogdan Gh. (VII: 549, 61, 3, 4, 5, 6; E. G.: 343, 5), Cuptor I. Petru (VII: 563), Dăscălescu V. I. (VII: 561, 3), Drăghicescu P. P. (VII: 561, 2, 3, 72*, 1, 4; VIII: 440, 1, 7, 8, 54; E. G.: 338, 9, 40, 3, 9), Eliade V. (VII: 561, 2, 3), Iacomi Mircea (VII: 549, 51, 5, 6, 62, 3), Manoliu G. V. (VII: 561, 2, 3), Oşlobeanu M. (VII: 563), Rădulescu I. (VII: 559, 60, 71, 4), Romanescu C. (VII: 561, 2, 3, 71), Stamate A. (VII: 561, 2, 3, 71, 4).

Liceul Internat Iaşi.

Clasa V-a: Dolinescu C. M. (E. G.: 363).
Clasa VI-a: Alexandru G. E. (VI: 629, 51*), Eftimie Gr. Al. (667, 650).
Clasa VII-a: Manolache M. (555, 7, 9, 60, 5, 74, 5, 89; E. G.: 346, 64).

Seminarul „Veniamin Costache", Iaşi.

Clasa IV-a: Popescu M. Gheorghe (IV: 560, 1).

Liceul „Sf. Petru şi Pavel", Ploeşti.

Clasa IV-a: Buzatu C. (IV: 550, 61).
Clasa V-a: Vintilescu G. (V: 656).

Clasa VI-a: Antoniu I. I. (VI: 650, 60), Cătuneanu N. I. (VI: 650). Moţoi S. C. (VI: 629, 33, 5, 6, 50, 73).

Clasa VII-a: Pandelescu Gh. I. (E. G.: 334).

Clasa VIII-a: Palancă C. C. (VIII: 443, 7, 51*, 3, 5).

Colegiul Naţional „N. Filipescu", Predeal.

Clasa III-a: Andreescu Onoriu (III: 159, 66), Badrus I. G (III: 163), Bărbuţă V. (III: 163), Bocea Alex. (III: 166), Butucescu Nic. (III: 163, 6), Constantinescu A. (III: 159, 63, 6), Constantinescu Al. Cicerone (III: 166), Diaconescu P. (III: 163), Diamandi Al. H. (III: 159), Doiciu Al. (III: 159, 63, 6), Dumitrescu G. I. (III: 163, 6), Gheorghiu G. M. (III: 159, 63, 6), Gomoiu Lucian (III: 159, 66), Iliescu D. (III: 159, 63), Isaica M. (III: 166), Mihăilă Mihai (III: 159, 163), Munteanu I. (III: 159, 63, 6), Nisipeanu Tr. (III: 163), Nicolescu D. (III: 163), Păduraru V. (III: 159, 66), Postelnicu Nic. (III: 159, 66), Radovici Iulian (III: 159), Ştefănescu Gr. M. (III: 163), Teodorescu D. (III: 163, 6), Tintorescu Mihai (III: 166), Ungureanu M. (III: 161, 6), Vasiliu I. G. (III: 163), Velicescu C. (III: 163, 6), Voinea I. N. (III: 166), Volanschi Al. Dan (III: 166), Vulcan Victor (III: 166, V: 672).

Clasa IV-a: Bejan Emil (IV: 569), Columbeanu D. P. (IV: 550, 553, 69), Costea N. St. (IV: 569), Dragomir Cezar (IV: 552, 69, 71), Ghiţă M. V. (IV: 552, 3, 4, 69), Ionescu I. Iustin (IV: 569), Marinescu C. M. (IV: 551, 2, 3, 4, 69, 71, 9), Pitiş Nic. (IV: 569, 71, 2, 3, 8), Pogoneanu I. M. (IV: 569), Vârtejeanu M. (IV: 544, 7, 52, 3, 4).

Clasa V-a: Alexandrescu V. (V: 656), Alexiu N. (V: 656), Bălănescu Gh. (V: 656), Balaban S. S. (V: 656, 8, 72), Bădilescu E. (V: 656, 72), Berberianu Al. (V: 656, 8, 72*), Creţu Ad. (V: 656), Cristescu P. (V: 656), Costescu N. (V: 656), Corţuşan C. (V: 656, 8, 72*), Dinescu I. (V: 656, 8), Dragomir H. (V: 656), Făşie M. (V: 656, 72*), Gaiu C. (V: 656), Georgescu S. (V: 656, 72*), Georgescu P. (V: 656), Greculescu T. (V: 656, 8), Ilie G. (V: 656), Iliescu C. (V: 656, 72*), Ică Tr. (V: 656), Ionescu V. (V: 656, 72), Ionescu Tr. (V: 656, 72*), Mităchescu P. (V: 656), Mihăiţă D. (V: 656), Moscu T. (V: 656, 66), Negulescu C. (V: 672*), Olaru Gh. (V: 656), Parotă P. (V: 656, 8, 72*), Postelnicu M. (V: 656), Popescu N. (V: 656), Pascal T. (V: 656, 72), Preutu Şt. (V: 656), Purica I. (V: 656, 8), Răican A. (V: 656, 8), Roinu I. (V: 656), Roşu M. (V: 656, 8, 44, 66, 72*), Şuvelea Fl. (V: 656), Tănăsescu C. (V: 656), Teodorescu V. (V: 658), Turtoescu (V: 656, 8, 66), Vlad I. (V: 656), Voiculescu M. (V: 656, 8, 72*).

Clasa VI-a: Bunescu Gh. (VI: 559, 639), Stoianovici S. (VI: 559, 639 40*, 74, 5, 6, 7, 3; VIII: 438; E. G.: 347).

Clasa VII-a: Aldea V. (VII: 545, 61, 3, 5, 76: VIII: 438), Antonescu L. M. (VII: 549, 63, 76), Arendt R. E. (VII: 546, 57; VIII: 438), Brătănescu G. (VIII: 562), Carp C. M. (VII: 562, 76), Cioconea P. Marius (VII: 562, 76), Crăciunescu I. M. (VII: 562, 5), Dumitrescu Dinu (VII: 562, 5), Floreşteanu Alex. (VII: 561, 2, 3, 5, 76), Ionescu Berechet Al. (VII: 562, 3, 76), Lungu

M. Tr. (VII : 551), Marinescu Ov. (VII : 563), Păun D. Mircea (VII : 562, 76), Petrescu I. Marcel (VII : 562), Vasilescu Beneventus (VII : 562), Zeveleanu Const. (VII : 555, 62, 3, 6).

Clasa VIII-a : Bârlea V. (VIII : 438), Dragomir Ad. (VIII : 438), Şerban C. (E. G. : 362).

Liceul „Al. Lahovary", Râmnicul-Vâlcea.

Clasa VII-a : Andreescu Gh. I. (VII : 560, 1, 74), Boerescu D. (VII : 560)

Liceul „Tudor Vladimirescu", Târgu-Jiu.

Clasa IV-a : Licărete V. Const. (IV : 550, 60).

Clasa V-a : Gâţă G. Gh. (VI : 640, 65, 8, 78), Manase C. Titu (V : 678).

Clasa VI-a : Giugiulan I. Ion (VI : 650, 1).

Clasa VII-a : Cristescu Gh. (VII : 563, 70, 4), Dănău C. (VII : 561, 4). Mihăescu Gh. (VII : 570), Poenaru Valeriu (VII : 551, 3), Vijulan I. V. (VII : 557, 61, 70), Ţivilea G. N. (VII : 570).

Liceul „Radu Greceanu", Slatina.

Clasa VI-a : Ciorobea N. Const. (VI : 650, 69), Dionisie Mihai (VI : 639).

Liceul „C. Diaconovici Loga", Timişoara.

Clasa VII-a : Barbu V. (VII : 543, 9, 55, 7, 8, 63, 70).

Clasa VIII-a : Bakonyi C. (VIII : 453*, 71).

Liceul militar „Mihai Viteazu", Timişoara.

Clasa IV-a : Bălănescu P. (IV : 530), Bonudel D. (IV : 530), Brânduş Gh. (IV : 530). Dumitrescu I. (IV : 530, 88), Gliga T. (IV : 530), Garon V (IV : 530), Grigorescu I. (IV : 530, 88), Moisescu A. C. (IV : 530), Niţescu C. (IV : 530), Perişoară N. (IV : 530, 78), Petrescu L. (IV : 530), Stan Aurel (IV : 578, 88, 9), Ştefănescu St. George (IV : 588, 9), Stoichiţoiu M. (IV : 569), Tatomir A. (IV : 530 , Tufcea E. (IV : 530), Todiricâ N. (IV : 588), Vilău P. (IV : 530).

Clasa V-a : Căpriţă Gr. I. (V : 657, 65).

Clasa VI-a : Ghiulai M. (VI : 567), Hossu I. (VI : 640), Marian M. D. (VI : 650), Marian M. D. (VI : 650), Miclea Mircea (VI : 640), Petrescu I. S. (VI : 640, 572), Popa I. (VI : 572), Văduva D. (VI : 572 ; E. G. : 359).

Clasa VII-a : Baranga T. G. (VII : 554, 8, 61), Gurău Eug. (VII : 561).

Liceul „Regele Ferdinand", Turda.

Clasa VII-a : Raţiu A. Mircea (VII : 549, 51, 2, 3, 4, 5, 8, 61, 2, 5).

Liceul „Traian", Turnu-Severin.

Clasa V-a : Dumitrescu Gh. T. (V : 666, 82, 74).

Clasa VIII-a : Bengulescu A. (E. G. : 334).

Elevi Particulari.

Clasa VI-a : Nistor I. I. (VI : 631), Arad.

Clasa VII-a : Bereanu B. (VIII : 538 ; E. G. : 343), Ploeşti.

EXERCIȚII PROPUSE

Soluțiile exercițiilor propuse în acest număr se primesc până la 1 Septembrie 1941

Clasa III-a. *Exerc. 178.* Fie patrulaterul ABCD și I punctul de întâlnire al diagonalelor. Se ia un punct A' pe latura AB. Cercul IA'B taie latura BC în B'; cercul IB'C taie latura CD în C'; cercul IC'D taie latura DA în D'.

1°. Să se arate că punctele A, A', I, D' sunt pe un cerc. Generalizare.

2°. Să se arate că, dacă patrulaterul ABCD este inscriptibil într'un cerc, patrulaterului A'B'C'D' i se poate înscrie un cerc.

O. N. Ț.

III. 179. Fie patrulaterul inscriptibil ABCD. Cercul descris pe diagonala AC, ca diametru, taie laturile BA, BC, DA, DC respectiv în punctele A', B', D', C'. Dreptele AB', CA' se taie în M, iar dreptele AC', CD' se taie în N. Să se arate:

1°. Că patrulaterul AMCN este inscriptibil.

2°. Diagonalele MN și BD ale celor două patrulatere sunt paralele și egale.

O. N. Ț.

III. 180. Fie $\overline{AB}$ un segment dat așezat orizontal, pe care construim un semicerc (O), avându-l ca diametru și așezat deasupra. Fie $\overline{AM}$ un arc cât o treime din semicerc și $\overline{MN}$ o coardă paralelă cu AB. Pe segmentele $\overline{AM}$ și $\overline{AN}$, luate ca diametre, construim respectiv semicercurile (I) și (L) de aceeași parte și deasupra lor (sensul fiind dela dreapta la stânga).

1°. Să se arate, că semicercurile (I) și (L) se taie a doua oară într'un punct P situat pe tangenta în A la cercul (O).

2°. Să se calculeze aria triunghiului curbiliniu $PM\overline{N}$ format de cele trei semicercuri, știind că lungimea segmentului AB este egală cu 2 unități.

3°. Să se calculeze *unghiul* sub care se taie semicercurile (I) și (L) în punctul P (adică unghiul tangentelor în P).

O. N. Ț.

III. 181. In cercul (O) de rază R construim doi diametri perpendiculari unul pe altul, AC, BD. Fie M mijlocul lui $\overline{OD}$, punctul P unde AM taie cercul a doua oară şi $\overline{PP'}$ coarda perpendiculară pe AC. Să se calculeze aria triunghiului STT', format de tangentele la cercul (O) în punctele A, P, P'.

O. N. Ţ.

III. 182. In cercul O diametrii CD, AB fac un unghiu de 60^0. Fie E proiecţia lui C pe AB şi M punctul unde DE taie cercul O. Raza cercului O fiind egală cu unitatea, să se calculeze distanţele punctului M la AB şi CD.

O. N. Ţ.

Clasa IV-a. *Exerc. 590.* Intr'o sferă cu centrul O şi raza R este înscris un patrat ABCD cu centrul I. Dreapta OI înţeapă sfera în punctul S, de aceeaşi parte cu centrul O faţă cu patratul ABCD. Ştiind că distanţa patratului la centrul sferei este *a*, să se calculeze suprafaţa totală şi volumul piramidei SABCD. Caz particular: $a = \frac{R}{2}$.

O. N. Ţ.

IV. 541. Se consideră o sferă cu centrul în O şi cu raza R. Un patrat ABCD este circumscris sferii (are laturile tangente sferii) şi are centrul I. Dreapta IO înţeapă sfera în S şi S', iar muchiile laterale ale piramidei SABCD (de exemplu) înţeapă sfera a doua oară în A_1, B_1, C_1, D_1 respectiv. Să se arate că $A_1B_1C_1D_1$ este asemenea *un patrat.*

Să se calculeze raportul *ariilor laterale* ale celor două piramide SABCD şi $SA_1B_1C_1D_1$; asemenea să se calculeze raportul *volumelor* acestor piramide, în ambele cazuri presupunându-se cunoscută distanţa patratului ABCD la centrul O.

Caz particular: $a = \frac{R}{2}$.

O. N. Ţ.

IV. 592. Se dă o sferă cu centrul O şi raza R; o dreaptă AB exterioară sferii în întregime. Să se arate cum putem construi planele tangente la sferă trecând prin dreapta AB.

Să se arate apoi că aceste plane tangente la sferă sunt tangente unui con de rotație cu vârful pe dreapta AB și circumscris sferii.

(*Notă.* Planul tangent la con în lungul unei generatoare conține tangenta la cercul de bază al conului).

O. N. Ț.

IV. 593. Fie o sferă cu raza R și centrul O; un plan (P) tangent sferii în A, capătul diametrului $\overline{AB}$; conul de rotație cu vârful în O și cu generatoarea egală cu diametrul sferii, baza lui fiind în planul (P). Generatoarele acestui con înțeapă sfera în punctele cercului (Q) cu centrul I, iar generatoarele conului, cu vârful în B și cu baza cercul de bază al conului precedent, înțeapă sfera în punctele cercului (S), cu centrul L. Să se găsească:

1°. Suprafața zonei sferii limitată de cercurile (Q) și (S);

2°. Suprafețele laterale ale conurilor având vârful în B și bazele cercurilor (Q) și (S).

O. N. Ț.

IV. 594. Se consideră o sferă cu centrul O și raza R; diametrul $\overline{AB}$ al acestei sfere și planul (Q) tangent în A la sferă.

Fie (P) cercul din planul (Q) cu centrul în A și cu raza $\overline{AP} = a$. Conul cu vârful în B și baza cercul (P) taie sfera după un cerc (M), iar conul cu vârful în O și cu baza cercul (M), prelungit, este tăiat de planul (Q) după un cerc (N). Să se calculeze:

1°. Aria coroanei cuprinse între cercurile (P) și (N).

2°. Aria trunchiului de con determinat de cercurile (M) și (P).

3°. Aria trunchiului de con determinat de cercurile (M) și (N).

4°. Aria calotei sferii cu polul A și cercul de bază (M).

O. N. Ț.

IV. 595. Fie două dreptunghiuri date ABCD, de dimensii $\overline{AD} = a$, $\overline{AB} = b$ și MNPR de dimensii $\overline{MR} = m$, $\overline{MN} = n$. Să se determine dimensiile unui al treilea dreptunghiu, x și y, în condițiile următoare: Pe laturile $\overline{AD}$ și $\overline{AB}$ construim dreptunghiurile de înălțime respectiv x și y, fie ADEF și ABGH; din nou construim pe laturile $\overline{AD}$ și AB dreptunghiurile ADE'F' și ABG'H' respectiv de înălțimi y și x. Pe latura $\overline{MR}$ construim un dreptunghiu MTUR

echivalent cu suma dreptunghiurilor ADEF şi ABGH, iar pe $\overline{MN}$ un dreptunghiu MNQS echivalent cu suma dreptunghiurilor ADE'F' şi ABG'H'. Pe $\overline{TS}$ ca latură construim patratul STVW. Apoi, din nou, pe latura $\overline{MR}$ construim un dreptunghiu MT'U'R echivalent cu suma dreptunghiurilor ADEF şi ABGH, iar pe $\overline{MN}$ un dreptunghiu MNQ'S' echivalent cu suma dreptunghiurilor ADE'F' şi ABG'H'. Pe $\overline{T'S'}$ ca latură construim patratul S'T'V'W'. *Suma* patratelor STVW şi S'T'V'W' este echivalentă cu patratul de latură l, iar *diferenţa* acestor patrate este echivalentă cu patratul de latura k. Discuţie.

O. N. Ţ.

IV. 596. Un vas în formă de trunchiu de con cu secţia ABCD [$\overline{AD}$ fiind diametrul bazei mari (gurii)] are fundul său de aceeaşi formă, cu secţia BEFC asemenea cu ABCD.

Ştiind că $\overline{AD} = 2R$, $\overline{AB} = g$, $\overline{BC} = 2r$, să se calculeze:

1°. Suprafaţa interioară a vasului (cu profilul ABEFCD).

2°. Capacitatea vasului.

Aplicaţie:

$$R = 22 \text{ cm} \quad ; \quad r = 10 \text{ cm} \quad ; \quad g = 13 \text{ cm}.$$

O. N. Ţ.

IV. 597. Un dogar vrând să vopsească o putină (cu formă de trunchiu de con) în cele trei culori naţionale, împarte generatoarea în trei părţi egale, şi duce paralele cu cercurile de bază, crezând că aşa părţile vopsite vor avea suprafeţe egale. Să se găsească numerele cu care sunt proporţionale suprafeţele vopsite.

O. N. Ţ.

IV. 598. Să se arate că:

$$\frac{a+b}{a-b}\left(1+\frac{abc}{(a-b)^2}\right)+\frac{(a+b)(c-1)}{a-b}=\frac{(a^3+b^3)c}{(a-b)^3}.$$

C. I. Ţ.

IV. 599. Se dă un patrat cu latura l. Să se determine aria triunghiului echilateral cu un vârf în vârful A al patratului şi cu celelalte două vârfuri pe laturile AB, AD.

C. I. B.

Clasa V-a. *Exerc. 695.* Fiind dat un patrat LMNP şi un patrulater ABCD având diagonalele $\overline{AC}, \overline{BD}$ egale şi perpendiculare, să se înscrie *în patratul dat* un patrulater A'B'C'D' egal cu patrulaterul dat ABCD.

Discuţie: *a)* Condiţiile de posibilitate ale problemii;

b) numărul soluţiilor în cazul când problema este posibilă.

O. N. Ţ.

V. 696. Fie (O) un cerc dat şi trei puncte date D, E, F în planul lui. Să se construiască un triunghiu ABC înscris în cercul O, astfel ca bisectoarele interioare ale lui să treacă prin cele trei puncte date. Discuţie. Generalizare.

O. N. Ţ.

V. 697. Fiind dat un patrat ADIL, măsurăm pe latura $\overline{DI}$ segmentul $\overline{DC}$ egal cu diagonala patratului, $\overline{DL}$ şi construim dreptunghiul ADCB.

Pe latura $\overline{AB}$ măsurăm segmentele $\overline{AG}$ şi $\overline{BF}$ astfel ca:

$$\overline{AG}^2 + \overline{BF}^2 = \overline{AB}^2 \qquad \text{(a)}.$$

Dreptele DF şi CG determină punctul E.

Care este *locul* punctului E, când considerăm pe AB toate perechile de puncte F, G.

O. N. Ţ.

V. 698. Un patrulater ABCD are diagonalele perpendiculare şi concurente în punctul I.

Să se arate, că dacă

$$(\overline{IA}^2 + \overline{IB}^2)(\overline{IC}^2 + \overline{ID}^2) = (\overline{IB}^2 + \overline{IC}^2)(\overline{ID}^2 + \overline{IA}^2),$$

în patrulaterul ABCD se poate înscrie un cerc.

O. N. Ţ.

V. 699. Intr'o sferă de rază R se înscrie un patrat ABCD de centru I. Fie S punctul unde dreapta OI înţeapă sfera. La ce distanţă de centrul sferei trebue înscris patratul ABCD pentru ca *suprafaţa laterală* a piramidei SABCD să fie egală cu $4a^2$.

Discuţie complectă.

O. N. Ţ.

V. 700. Intr'o sferă de centru O şi rază R se înscrie un patrat ABCD de centrul I. Fie S punctul unde dreapta OI înţeapă sfera. La ce distanţă de centrul sferei trebue să fie înscris patratul ABCD, pentru ca *aria totală* a piramidei SABCD să fie egală cu $4a^2$.

Discuţie complectă.

O. N. Ţ.

V. 701. Fie o sferă dată cu centrul O şi raza R; un diametru $\overline{AB}$ al sferii; planul (P) tangent sferii în punctul A şi conul de rotaţie având vârful în centrul O şi cercul de bază (γ) în planul tangent (P). Generatoarele acestui con înţeapă sfera (O) în punctele cercului (Q), iar generatoarele conului, cu vârful în B şi baza cercul de bază al conului precedent, înţeapă sfera în punctele cercului (S).

Să se determine generatoarea primului con astfel ca suprafaţa zonei cuprinsă între cercurile (Q) şi (S) să fie egală cu *o treime* din suprafaţa sferii (O).

O. N. Ţ.

V. 702. Se consideră o sferă cu centrul O şi rază R; diametrul $\overline{AB}$ al sferei şi un plan (Q) tangent sferii în A. Fie (P) un cerc în planul (Q) cu centrul în A. Conul cu vârful în B şi cu baza cercul (P) taie sfera după un cerc (M), iar conul cu vârful în O şi cu baza cercul (M), prelungit, este tăiat de planul (Q) după un cerc (N).

Să se determine raza cercului (P) astfel, ca *aria coroanei* cuprinse între cercurile (P) şi (N) să fie egală cu aria unui cerc de rază egală cu $\frac{7}{3}$ R.

Asemenea să se determine raza cercului (P) astfel ca suprafaţa coroanei cuprinse între cercurile (P) şi (N) să fie egală cu a cercului care are ca rază de *cinci ori latura triunghiului echilateral înscris într'un cerc mare al sferii.*

O. N. Ţ.

V. 703. Se consideră un cilindru circular drept de rază R şi înălţime I; apoi un con cu vârful pe axa cilindrului şi cu pânza prelungită până la ambele baze ale cilindrului, formând astfel două

conuri cu acelaşi unghiu de deschidere. Să se determine *razele* celor două conuri astfel ca *suma volumelor celor două conuri* să fie egală cu *volumul cilindrului*, ştiind că suma acestor două raze este tot timpul o lungime dată *l*. Discuţie complectă.

O. N. Ţ.

V. 704. Să se rezolve ecuaţia:

$$x^2 - x + a = 0,$$

ştiind că

$$\frac{x_1}{x_2} = a.$$

C. I. Ţ.

Clasa VI-a. *Exerc. 683.* Să se arate că între elementele unui triunghiu dreptunghic de ipotenuză a şi catete b, c avem următoarele relaţiuni

$$\frac{a}{b+c} = \frac{r_a - r}{r_a + r} \quad ; \quad \frac{bc}{b^2 + c^2} = \frac{2r\,r_a}{(r_a - r)^2},$$

r, r_a fiind razele cercurilor tritangente.

Gh. B.

VI. 684. Intr'o sferă (O) de rază R este dat un cerc de secţie (İ) oarecare. Fie A şi B extremităţile diametrului OI al sferei O. Insemnând cu V_A şi V_B respectiv volumele conurilor cu vârfurile în A şi baza cercul (İ); iar cu G_A şi G_B respectiv generatoarele lor, să se arate că avem:

$$\frac{V_A}{V_B} = \left(\frac{G_A}{G_B}\right)^2.$$

O. N. Ţ.

VI. 685. Intr'o sferă (O) de rază R este dat un cerc (İ) de rază *r*. Fie A şi B extremităţile diametrului Oİ al sferei (O); (L) şi (M) două cercuri de secţie, în cele două conuri cu baza cercul (I) şi vârfurile în A şi B, paralele cu această bază comună.

Să se determine condiţia, pentru ca aceste două cercuri de secţie să fie egale.

Să se arate în acel caz că volumele triunchiurilor de con, determinate de cercul (I) cu fiecare din cele două cercuri (L) şi (M), sunt în raport constant.

(Valoarea constantă a raportului este patrat perfect).

O. N. Ţ.

VI. 686. Fie rombul ABCD, în care proiecţia înălţimii AA' pe latura adiacentă AD este egală cu jumătatea lui $\overline{AA'}$; I punctul de întâlnire al diagonalelor. Fie O simetricul lui I în raport cu C şi OX o axă perpendiculară pe OI.

Se roteşte rombul ABCD în jurul axei OX; ştiind că $\overline{OC} = a$ să se dea expresia exactă a *volumului* şi *suprafeţii* solidului născut.

O. N. Ţ.

VI. 687. Se dă o sferă cu centrul O şi raza R; o dreaptă AB exterioară sferii în întregime. Să se arate cum putem construi planele tangente sferii trecând prin dreapta AB. Să se arate apoi că aceste plane tangente la sferă sunt tangente unui con de rotaţie cu vârful pe dreapta AB şi circumscris sferii. Să se determine unghiul celor două plane tangente, ştiind că distanţa dreptei AB la centrul sferii este *d*. Aplicaţie:

$$R = 5555 \text{ m} \quad ; \quad d = 14443 \text{ m}.$$

(*Notă.* Planul tangent la con conţine tangenta la cercul de bază).

O. N. Ţ.

VI. 688. Fie o sferă dată cu centrul O şi raza R; un diametru AB a sferii O; planul (P) tangent sferii în A şi conul de rotaţie cu vârful în O, cu unghiul de deschidere egal cu 2α şi cu baza în planul (P). Generatoarele conului precedent înţeapă sfera în punctele cercului (Q); iar generatoarele conului cu vârful în B şi cu baza comună cu conul de mai înainte înţeapă sfera în punctele cercului (S). Să se găsească:

1°. Suprafaţa zonei sferii, limitată de cercurile (Q) şi (S).

2°. Suprafețele laterale ale conurilor având vârful în B și ca baze respectiv cercurile (Q) și (S).

3°. Suprafețele laterale ale triunchiurilor de con, tăiate din conurile precedente, având ca baze respectiv cercul din planul (P) cu cercul (Q) și cercul din planul (P) cu cercul (S).

Aplicație:

$$R = 1 \; ; \quad \alpha = 30^0.$$

O. N. Ț.

VI. 689. Prin vârfurile unui patrat ABCD de latură a se construiesc drepte care fac în același sens cu laturile respective ale patratului același unghiu α; aceste drepte formează un nou patrat A'B'C'D'. Să se determine unghiul α astfel ca perimetrele celor două patrate să fie într'un raport dat k. Discuție.

Aplicație:

$$k = \sqrt{2} \; ; \; k = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

O. N. Ț.

VI. 690. Fie patratul ABCD de latură a. Prin vârful A ducem o dreaptă AD', făcând cu latura AB către interiorul patratului unghiul α, care întâlnește latura opusă CD în D'; repetăm apoi construcția pentru fiecare vârf.

Să se determine unghiul α astfel ca patratul obținut în acest fel, A'B'C'D', să aibă aria sa de k ori aria patratului dat. Discuție. Caz particular: $k = 3$.

O. N. Ț.

VI. 691. Prin vârfurile unui triunghiu ABC ducem trei drepte $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, limitate la laturile opuse și făcând cu aceste laturi opuse unghiurile α, β, γ în același sens; ele formează un nou triunghiu MNP. Să se calculeze laturile triunghiului MNP.

Care sunt relațiile care leagă cele trei unghiuri pentru ca triunghiul MNP să fie asemenea cu triunghiul dat ABC? Discuție.

O. N. Ț.

VI. 692. Să se arate că oricare ar fi a şi b avem:

$$1 + \sec a \operatorname{cosec} b \geqslant \sec a + \operatorname{cosec} b.$$

C. I. Ţ.

Clasa VII-a. *Exerc. 603.* Dintre toate triunghiurile de *arie constantă* care este acela de *perimetru minim?*

* * *

VII. 604. Pe un cerc cu centrul O şi raza R luăm punctul A şi ducem diametrul AB şi o coardă AC. Fie M un punct variabil pe arcul BC cuprins între diametrul AB şi coarda AC.

Să se studieze variaţia *sumei distanţelor* punctului M la diametrul AB şi coarda AC.

O. N. Ţ.

VII. 605. Pe raza OI a cercului (O), luată ca diametru se descrie cercul (C). O secantă trecând prin I taie cercurile (C) şi (O) respectiv în M şi N. Să se studieze variaţia perimetrului triunghiului OMN, când secanta IMN ia toate poziţiile posibile.

O. N. Ţ.

VII. 606. Fie (O) şi (C) două cercuri de raze r şi R tangente exterior în punctul I. Prin I ducem o secantă variabilă tăind cercul (O) în M, iar pe (C) în N. Unim M şi N cu punctele de contact P şi Q ale tangentei comune $\overline{PQ}$ la cele două cercuri.

Ştiind că $R = 2r$, să se studieze variaţia perimetrului patrulaterului convex MNQP.

O. N. Ţ.

VII. 607. Fiind date două cercuri egale (O) şi (C), tangente exterior în punctul I, se înscriu toate dreptunghiurile posibile (având pe fiecare din aceste două cercuri două vârfuri).

Să se studieze variaţia perimetrului acelor dreptunghiuri.

O. N. Ţ.

VII. 608. Să se studieze funcţiunea:

$$y = \sqrt{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} + \sqrt{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x}}}.$$

C. I. Ţ.

VII. 609. Se dă planul definit prin linia de pământ şi punctul A (3, 1, — 4), planul P'αP definit de o orizontală situată la distanţa 6 de planul orizontal de proiecţie, înclinată de 30° pe planul vertical şi de o altă orizontală inclinată de 45° pe planul vertical. Să se găsească intersecţia acestor plane.

C. I. B.

VII. 610. Se dau punctele A (5, 6, 0), B (5, 0, — 3), C (5, 2, 0), D (5, 0, 4). Prin punctele A, B se duce un plan P paralel cu linia de pământ. Prin C, D se duce un plan Q paralel cu linia de pământ. Să se găsească intersecţia celor două plane şi intersecţia dreptelor AB, CD.

C. I. B.

VII. 611. Se dau trei oglinzi plane (*a*), (*b*), (*c*). O rază de lumină întâlneşte oglinda (*a*) în A. Raza reflectată întâlneşte oglinda (*b*) în B, iar noua rază reflectată întâlneşte în C oglinda (*c*). Dacă oglinzile (*a*), (*b*) fac unghiul α, iar oglinzile (*b*), (*c*) unghiul β — să se studieze variaţia sumei

$$\overline{AB} + \overline{BC}.$$

(Caz particular, $\alpha = 60^0$, $\beta = 45^0$).

C. I. B.

VII. 612. Să se afle derivata funcţiunei y de x:

$$\begin{vmatrix} a^x & a^y & 1 \\ a^{2x} & a^{2y} & 1 \\ a^{3x} & a^{3y} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

C. I. B.

Clasa VIII-a. *Exerc. 484.* Fie sfera cu centrul O şi raza R, apoi un patrat ABCD de centrul I circumscris sferii. Dreapta OI înţeapă sfera S în S', iar muchiile laterale ale piramidei SABCD înţeapă sfera respectiv în punctele A_1, B_1, C_1, D_1. Să se determine distanţa patratului ABCD faţă cu centrul O astfel ca latura patratului $A_1B_1C_1D_1$ să fie egală cu o lungime dată *a*.

Discuţie.

O. N. Ţ.

VIII. 485. Fie o sferă dată cu centrul O şi raza R; un diametru $\overline{AB}$ al sferii; planul (P) tangent sferii în punctul A şi conul de rotaţie având vârful în centrul O şi cercul de bază (γ) în planul tangent (P). Generatoarele acestui con înţeapă sfera O în punctele cercului (Q), iar generatoarele conului, cu vârful în B şi baza cercul de bază al conului precedent, înţeapă sfera în punctele cercului (S).

Să se determine generatoarea primului con astfel ca suprafaţa zonei sferii cuprinsă între cercurile (Q) şi (S) să fie egală cu $2\pi a^2$. Discuţie.

O. N. Ţ.

VIII. 486. Se consideră o sferă cu centrul O şi raza R; diametrul $\overline{AB}$ al acestei sfere şi planul (Q) tangent sferii în A. Fie (P) un cerc în planul (Q) cu centrul în A. Conul cu vârful în B şi cu baza cercul (P) taie sfera după un cerc (M), iar conul cu vârful în O şi cu baza cercul (M), prelungit, este tăiat de planul (Q) după un cerc (N).

Să se determine raza cercului (P) astfel ca aria coroanei cuprinse între cercurile (P) şi (N) să fie egală cu aria unui cerc de rază *a*. Discuţie.

O. N. Ţ.

VIII. 487. Se dă patratul ABCD. Prin vârful A se duce o secantă făcând unghiul α cu AB, care taie pe CD în E, iar prin B se duce o a doua secantă care taie pe AD în F făcând cu BA unghiul 2α. Să se determine unghiul α astfel ca trapezul ABEF să aibă aria de *k ori* aria patratului dat.

Să se determine apoi unghiul α astfel ca perimetrul trapezului ABEF să fie de $p(p-1)$ latura patratului (p fiind un număr întreg pozitiv > 1).

O. N. Ţ.

VIII. 488. Se dă o elipsă (E), un punct variabil M pe ea o coardă $\overline{MM'}$ a elipsei şi un punct P astfel ca $\frac{\overline{PM}}{\overline{PM'}} = -k$. Să se găsească locul punctului P când M mişcându-se pe elipsă, coarda MM' îşi păstrează direcţia. Să se examineze cazurile corespunzătoare valorilor singulare ale lui k. Problema analoagă pentru o *hiperbolă* sau *parabolă* dată.

O. N. Ţ.

VIII. 489. Un dogar vrând să vopsească o putină (cu forma unui trunchiu de con) în trei culori, împarte generatoarea în trei părţi egale şi duce cercuri paralele cu cercurile paralele, crezând că astfel părţile văpsite vor avea suprafeţe egale.

Cum trebuia împărţită generatoarea, pentru ca în adevăr părţile văpsite în roş, galben şi albastru să aibă suprafeţe, egale?

O. N. Ţ.

VIII. 490. Pe baza BC a triunghiului isoscel BAC ($\overline{AB} = \overline{AC}$) sunt date două puncte A_1 şi A_2, simetrice faţă cu mijlocul O al lui $\overline{BC}$. O dreaptă Δ taie laturile AB şi AC respectiv în P şi N. Fie M punctul de întâlnire al dreptelor A_1N, A_2P.

Să se găsească locul punctului M când dreapta Δ se deplasează rămânând paralelă cu ea însăşi. Discuţie complectă. Generalizare.

O. N. Ţ.

VIII. 491. Se dau două cercuri concentrice cu centrul comun O şi se duce o rază comună OM_1M_2 (M_2 fiind pe cercul cel mic). Fie două direcţii Δ_1 şi Δ_2, fixe în plan.

Paralelele duse prin M_1 și M_2 respectiv la Δ_1 și Δ_2 se întâlnesc în M. Să se găsească locul punctului M, când raza OM_1M_2 se rotește în jurul lui O.

Să se examineze cazul particular al direcțiilor Δ_1, Δ_2 perpendiculare una pe alta. Discuție.

O. N. Ț.

VIII. 492. Se consideră ecuațiunea

$$f(x) \equiv x^3 - 12x^2 + 47x + a = 0.$$

1. Să se determine a și să se rezolve ecuațiunea știind că rădăcinile ei sunt lungimile laturilor unui triunghiu dreptunghiu.

2. Să se calculeze aria mărginită de curba $y = f(x)$ și axa $x'x$.

3. Să se formeze ecuația ale cărei rădăcini sunt $\sin\alpha_1$, $\sin\alpha_2$, $\sin\alpha_3$ unde α_1, α_2, α_3 sunt arcele ale căror tangente sunt egale cu rădăcinile ecuației $f(x) = 0$.

C. I. B.

VIII. 493. Să se reprezinte funcțiunea

$$y = e^{\frac{1}{x}} \sin x,$$

apoi să se calculeze ariile mărginite de curbă, axa x' pentru valori ale lui x mai mari decât 1. Să se studieze natura seriei obținute.

C. I. B.

Exerciții generale. *Exerc. 382.* Să se găsească numărul întreg N știind că N^2 și $N(N+1)$ sunt respectiv numerele de câte trei cifre *abc* și *acb*.

Gh. B.

E. G. 383. Să se calculeze expresia:

$$E = \underset{(n-1)}{3}\Big[\underset{(n-2)}{3}\Big[\underset{(n-3)}{3}\Big[\ldots\Big[\underset{(1)}{3}+\underset{(1)}{2}\Big]+\underset{(2)}{2^2}\Big]+\underset{(3)}{2^3}\Big]+\ldots+2^{n-1}\Big]+2^n.$$

I. L.

E. G. 384. a şi b sunt numere prime cu 11, să se determine valorile lui k pentru care suma

$$a^4 + kb^4$$

este divizibilă cu 11.

I. L.

E. G. 385. Dacă N este un număr de n cifre, atunci intervalul de variaţie al cifrelor lui N^n este egal cu n.

I. L.

E. G. 386. Să se calculeze expresia:

$$E = \frac{4!! - 3!!}{2!!}.$$

I. L.

E. G. 387. Dacă numerele a şi b sunt întregi şi pozitive, iar $\varphi(i)$ reprezintă indicatorul lui i, în ce caz avem:

$$[\varphi(a)]^{\varphi(b)} - [\varphi(b)]^{\varphi(a)} = \mathcal{M}(a.b)\,?$$

I. L.

E. G. 388. Câte *bicuburi* de 12 cifre sunt divizibile cu 13?

I. L.

E. G. 389. Suma a două *bicuburi* poate să fie divizibilă cu 11?

I. L.

E. G. 390. Suma a trei *bicuburi* poate să fie divizibilă cu 11?

I. L.

INSTRUCȚIUNI

a) Soluțiile exercițiilor se vor scrie cu cerneală, pe sferturi de coală și numai pe o parte a foii.

Dacă va fi nevoie de mai multe foi pentru soluționarea unui exercițiu, ele se vor coase sau lipi în partea stângă. Figurile, ce vor fi necesare pentru urmărirea exercițiului se vor construi îngrijit, pe foi aparte, având formatul arătat mai sus și se vor coase sau lipi odată cu soluția.

Nu se vor trimite soluțiile mai multor exerciții pe aceeași foaie.

b) Redactarea soluțiilor se va face astfel:

Sus, se va scrie numărul exercițiului, dedesubt enunțul astfel cum e publicat în revistă, cu inițialele propunătorului, apoi soluția clar compusă, iar la sfârșit, iscălitura rezolvitorului în ordinea următoare:

Numele de botez complet, inițiala părintelui, numele de familie, însoțit de clasa și școala pe care o urmează.

c) Nu se vor lua în considerare soluțiile iscălite de 2 sau mai mulți corespondenți, nici soluțiile exercițiilor propuse la clase inferioare aceleia în care corespondentul se află. Pentru redijarea soluțiilor se pot vedea indicațiile din Nr. 1, Vol. IV.

d) Soluțiile se primesc timp de 3 luni dela propunerea exercițiului, numai dela abonații „Suplimentului cu Exerciții" al Gazetei Matematice, pe adresa Căpitan Ing. C. D. Ionescu-Țiu, Casa Gazeta Matematică, Calea Griviței 158, București 2.

Drepturile de reproducere rezervate Societății «Gazeta Matematică».

Elevii claselor VI, VII și VIII, cu bogată activitate la această revistă își pot lărgi cadrul activității soluționând probleme din „Gazeta Matematică".

In Biblioteca „Gazetei Matematice" au apărut și se găsesc la adresa indicată mai sus, următoarele:

III. **N. Abramescu,** Lecțiuni elementare de Algebră superioară, pentru clasa VIII-a științifică, Ediția VI-a . . . . . Lei 120

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și G. Țițeica,** Vocabular Matematic . . . . . .Lei 20

X. **G. Țițeica,** Culegere de Probleme de Geometrie . . .Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. Istoric, învățăminte. Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 200 / pentru abonații G. M. și S. G. M. . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I. (Goniometrie) revăzută și adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** Culegere de Probleme de Aritmetică. Partea I. Aritmetica rațională . . . . . Lei 190

XIV. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I-a. (Trigonometrie plană). Ediția II-a revăzută și adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

XV. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea I. Ediția IV-a revăzută și mărită . . . . . Lei 120

XVI. **G. Țițeica,** Culegere de Probleme de Geometrie Analitică. Partea I. Ediția II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . .Lei 140

XVII. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea II-a. Ediția IV-a, revăzută și mărită . . . . . .Lei 240

Biblioteca Istorică a GAZETEI MATEMATICE

1. Elementele lui **Euclid.** (Cărțile I — VI de Geometrie plană) tradusă din limba greacă de *V. Marian* . . . . . .Lei 160

Suplimentul cu Exerciții. Abonamentul anual (9 numere) Lei 50

„Gazeta Matematică" apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plătește înainte și începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele și toată corespondența se trimite pe adresa:

Societății „GAZETA MATEMATICĂ"

Casa Gazeta Matematică — Calea Griviței No. 158. — București 2.

(Telefon: 3-9803).

M. O., IMPRIMERIA NAȚIONALĂ — C. 71.919